Roman **Leitner**

Zarys matematyki wyższej

dla studentów

część 1

Wydawnictwo WNT

Zarys matematyki wyższej

dla studentów

Roman **Leitner**

Zarys matematyki wyższej

dla studentów

część 1

Wydawnictwo WNT

Opiniodawca: *Bolesław Palczewski*
Redaktor wyd. XIII: *Lilianna Szymańska*
Okładkę projektował: *Przemysław Spiechowski*
Redaktor techniczny: *Grażyna Miazek*
Wydawca: *Karol Zawadzki*

ISBN 978-83-01-18823-8 całość
ISBN 978-83-01-18953-2 część 1

Wydanie XIII – 1 dodruk (PWN)
Warszawa 2016

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa do wydania szóstego

Szóste wydanie *Zarysu matematyki wyższej* różni się znacznie od wydań poprzednich i jest właściwie nową książką. Pierwsza jej część obejmuje materiał pierwszej i drugiej części poprzednich wydań oraz kilka nowych rozdziałów. Druga część książki zawierać będzie resztę materiału poprzednich wydań i sporo nowych rozdziałów.

Tak znaczne skondensowanie materiału uzyskano dzięki temu, że uwzględniając nowy program matematyki w szkołach średnich i zakładając lepsze przygotowanie Czytelnika do rozważań abstrakcyjnych, ograniczono rozważania wstępne oraz zwiększono precyzję i zwartość wypowiedzi. Zachowano jednak taki układ materiału, aby książka była zrozumiała także dla Czytelnika, który ukończył szkołę średnią według dawnego programu.

Wykład jest sekwencją definicji, twierdzeń z dowodami i przykładów. Definicje różnią się od innych wypowiedzi tym, że zawierają zwroty: „oznacza, że", „nazywa się", „mówimy, że" lub „nazywamy", a nowo wprowadzany termin wydrukowany jest pismem pochyłym (kursywą). Twierdzenia wyróżniono w książce kursywą i poprzedzono numerami odbitymi półgrubą czcionką. Po twierdzeniach następują dowody. Znak ■ oznacza koniec dowodu. Fragmenty książki, które przy pierwszym czytaniu można pominąć, oznaczono gwiazdkami.

W celu opanowania materiału podanego w książce Czytelnik powinien samodzielnie rozwiązać znaczną liczbę zadań, korzystając ze zbiorów, których wykaz podano na końcu książki.

Warszawa, luty 1976 r. *ROMAN LEITNER*

Rozdział 1 **Logika**

Rozdział 1. Logika

§ 1. Rachunek zdań

Zdanie. Przedmiotem logiki są związki między zdaniami. Przez *zdanie* rozumiemy w logice wypowiedź oznajmującą i sensowną, tj. taką, której w ramach danej nauki można przypisać ocenę prawdziwości albo fałszu i tylko jedną z tych dwóch ocen.

Ocenę prawdziwości oznaczamy cyfrą 1, ocenę fałszu cyfrą 0. Zdania oznaczamy literami $p, q, r, \ldots$. Jeśli p jest zdaniem prawdziwym, to mówimy, że wartość logiczna zdania p jest równa 1 i piszemy

$$w(p) = 1$$

Jeśli p jest zdaniem fałszywym, to mówimy, że wartość logiczna zdania p jest równa 0 i piszemy

$$w(p) = 0$$

Nie dopuszczamy innych wartości zdania niż 0 i 1, czyli rozważamy *logikę dwuwartościową*.

Zmienna zdaniowa. Literę, która może oznaczać dowolne zdanie (z zakresu danej nauki) nazywamy *zmienną zdaniową*. Zmienna zdaniowa może mieć wartość logiczną 1 lub 0 zależnie od tego jakie zdanie oznacza. Jeśli za zmienną zdaniową p podstawiono zdanie prawdziwe, to mówimy, że dokonano podstawienia $p = 1$, jeśli zaś za p podstawiono zdanie fałszywe, to mówimy, że podstawiono $p = 0$.

Zmienna nazwowa. W matematyce rozważamy zbiory liczb, zbiory funkcji, zbiory figur itp. Literę oznaczającą dowolny element takiego zbioru nazywamy *zmienną nazwową* (*indywiduową*).

Zdania złożone. *Zdania złożone* tworzymy w logice ze zdań składowych za pomocą *spójników logicznych*. Istnieje kilkanaście spójników logicznych, z których najważniejszymi i wystarczającymi dla potrzeb matematyki są

$$\textit{nie} \qquad \textit{i} \qquad \textit{lub} \qquad \textit{implikuje} \qquad \textit{jest równoważne} \tag{1.1}$$

Spójniki te oznaczamy symbolami

$$\sim \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \Rightarrow \qquad \Leftrightarrow \tag{1.2}$$

Zdania złożone, utworzone za pomocą tych spójników ze zdań p, q, podane są w następującej tablicy

	Nazwa	Zapis[1]	Sposób odczytania[2]
1	Negacja (zaprzeczenie)	$\sim p$	nie p
2	Koniunkcja (iloczyn logiczny)	$p \wedge q$	p i q
3	Alternatywa (suma logiczna)	$p \vee q$	p lub q
4	Implikacja (wynikanie)	$p \Rightarrow q$	p implikuje q
5	Równoważność (ekwiwalencja)	$p \Leftrightarrow q$	p jest równoważne q

Zdania składowe (człony), z których zbudowane jest zdanie złożone, nazywamy:
– *czynnikami* w przypadku koniunkcji,
– *składnikami* w przypadku alternatywy,
– *poprzednikiem* i *następnikiem* w przypadku implikacji.

Treść logiczną negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdefiniujemy za pomocą *tabel zerojedynkowych.* Tabele takie podają wartości logiczne zdań złożonych w zależności od tego jakie są wartości logiczne zdań składowych.

Negację definiujemy za pomocą następującej tabeli

p	$\sim p$
1	0
0	1

Z tabeli tej odczytujemy, że negacja zdania p jest:
– fałszywa, gdy zdanie p jest prawdziwe,
– prawdziwa, gdy zdanie p jest fałszywe.

Pozostałe cztery zdania złożone definiujemy za pomocą tabeli

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

---

[1] Inne sposoby zapisu: negacji $\neg p$, koniunkcji $p \cdot q$, alternatywy $p+q$, implikacji $p \rightarrow q$, $p \succ q$, równoważności $p \equiv q$, $p \leftrightarrow q$, $p \rightleftarrows q$, $p \sim q$.

[2] Inne sposoby odczytania: negacji — „nieprawdą jest, że p", implikacji — „jeśli p, to q", „z p wynika q", „p pociąga q", „p jest warunkiem wystarczającym dla q", „q jest warunkiem koniecznym dla p", równoważności — „p jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q", „p jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy q jest prawdziwe".

Z tabeli tej odczytujemy, że:

— koniunkcja jest prawdziwa, gdy oba czynniki koniunkcji są prawdziwe, w pozostałych przypadkach jest fałszywa;

— alternatywa jest fałszywa, gdy oba składniki alternatywy są fałszywe, w pozostałych przypadkach jest prawdziwa;

— implikacja jest prawdziwa, gdy poprzednik i następnik są prawdziwe, a także wtedy, gdy poprzednik jest fałszywy (co wyrażamy, mówiąc: *z prawdy prawda wynika* oraz *z fałszu zarówno prawda jak i fałsz mogą wynikać*); implikacja jest fałszywa, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy (co wyrażamy, mówiąc: *z prawdy fałsz nie wynika*);

— równoważność dwóch zdań jest prawdziwa, gdy zdania te mają jednakową wartość logiczną; w przeciwnym przypadku równoważność tych zdań jest fałszywa. Implikacji nie należy utożsamiać z wnioskowaniem. Implikację można tworzyć ze zdań nie pozostających w związku przyczynowym, co więcej, implikacja taka jest prawdziwa, gdy oba te zdania są fałszywe. Natomiast *wnioskowanie* polega na tym, że ze zdania uznanego za prawdziwe wyprowadzamy nowe zdanie prawdziwe.

Wnioskowanie jest odpowiednikiem tego przypadku implikacji, w którym poprzednik i następnik są prawdziwe.

Spójniki logiczne zaliczamy do *funktorów zdaniotwórczych*[1] i nazywamy odpowiednio: funktorem negacji, funktorem koniunkcji, funktorem alternatywy, funktorem implikacji i funktorem równoważności. Pierwszy z tych funktorów jest jednoargumentowy, gdyż odnosi się do jednego zdania, pozostałe są dwuargumentowe, gdyż odnoszą się do pary zdań.

Nawiasy i kolejność stosowania funktorów. Aby zapewnić sobie jednoznaczność odczytu zdania złożonego, którego człony są również zdaniami złożonymi, wprowadzamy podobnie jak w arytmetyce, nawiasy np.

$$[p \vee (\sim q)] \Leftrightarrow [\sim(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)] \tag{1.3}$$

Aby zaś uniknąć nadmiaru nawiasów, przyjmujemy umowę, że tam, gdzie nie ma nawiasów, kolejność stosowania poszczególnych funktorów powinna być zgodna z kolejnością wymienienia ich w (1.2). Mówimy, że znak negacji wiąże się ze zmienną zdaniową mocniej niż pozostałe 4 znaki, a znak koniunkcji wiąże się mocniej niż znaki alternatywy, implikacji i równoważności itd. Dzięki tej umowie wyrażenie (1.3) może być zapisane w postaci

$$p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim(p \vee q) \Rightarrow q \wedge r \tag{1.4}$$

Symbolika beznawiasowa Łukasiewicza[2]**.** W symbolice tej funktory (1.1) oznaczane są literami N, K, A, C, E, które pisze się przed argumentami tych funktorów. Tak więc alternatywę $p \vee q$ zapisujemy w postaci Apq, alternatywę $p \vee \sim q$ w postaci $ApNq$, a wyrażenie (1.4) w postaci

$$EApNqCNApqKqr$$

---

[1] Także kwantyfikatory (§ 3) są funktorami zdaniotwórczymi.

[2] Jan Łukasiewicz (1878–1956), logik polski.

Obliczanie wartości logicznej formuły rachunku zdań. Dowolny napis utworzony ze zmiennych zdaniowych i symboli spójników logicznych, który po podstawieniu za zmienne dowolnych zdań staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), nazywamy *formułą rachunku zdań.* Wartość logiczna każdej formuły rachunku zdań na ogół zależy od wartości logicznych jej członów.

Przykład 1.1. Formuła rachunku zdań

$$p \vee \sim q$$

po podstawieniu $p = 0, q = 1$ ma wartość logiczną

$$0 \vee \sim 1 = 0 \vee 0 = 0$$

Ta sama formuła dla $p = 0, q = 0$ ma wartość logiczną

$$0 \vee \sim 0 = 0 \vee 1 = 1$$

Przykład 1.2. Formuła $p \vee \sim p$ przy każdym podstawieniu przyjmuje wartość 1, bowiem

$$\text{dla } p = 1 \text{ jest } 1 \vee \sim 1 = 1 \vee 0 = 1$$
$$\text{dla } p = 0 \text{ jest } 0 \vee \sim 0 = 0 \vee 1 = 1$$

§ 2. Tautologie. Reguły wnioskowania

Tautologie. Formułę rachunku zdań, która przy podstawieniu za zmienne zdaniowe dowolnych zdań prawdziwych lub fałszywych staje się zawsze zdaniem prawdziwym, nazywamy *tautologią.* Aby zaznaczyć, że formuła F jest tautologią, można posłużyć się znakiem $\vdash$ (który odczytujemy: *zawsze prawdą jest, że*) i napisać $\vdash F$. Istnieje nieskończenie wiele tautologii; są one w logice tym, czym tożsamości np. algebraiczne lub trygonometryczne w matematyce. Niektóre tautologie były znane już w starożytności i w średniowieczu i uważano je za *podstawowe prawa logiki.* Poniżej formułujemy kilkanaście najważniejszych tautologii, przy czym litery P, Q, R oznaczają dowolne formuły rachunku zdań, a obok podajemy nazwy tych tautologii

$P \vee \sim P$	prawo wyłączonego środka[1]
$\sim (P \wedge \sim P)$	prawo niesprzeczności
$P \wedge P \Leftrightarrow P$	idempotentność koniunkcji
$P \vee P \Leftrightarrow P$	idempotentność alternatywy
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	przemienność koniunkcji
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	przemienność alternatywy
$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	łączność koniunkcji
$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$	łączność alternatywy
$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$	rozdzielność koniunkcji względem alternatywy
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	rozdzielność alternatywy względem koniunkcji
$\sim (\sim P) \Leftrightarrow P$	podwójna negacja
$\sim (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$	negacja koniunkcji[2]
$\sim (P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$	negacja alternatywy[2]
$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Q \vee \sim P$	związek implikacji z alternatywą

[1] tertium non datur.

[2] Prawa negacji koniunkcji i negacji alternatywy nazywane są *prawami de Morgana.* A. de Morgan (1806–1871), logik angielski.