

JACEK TOMASIEWICZ

# ZAPRZYJAŻNIJ SIĘ Z ALGORYTMAMI



**PRZEWODNIK DLA POCZĄTKUJĄCYCH  
I ŚREDNIO ZAAWANSOWANYCH**

**ZAPRZYJAŻNIJ SIĘ  
Z ALGORYTMAMI**

*Mojej mamie, Irenie Tomasiewicz,  
oraz przyszłej żonie, Sylwii Stacheckiej*

JACEK TOMASIEWICZ

# ZAPRZYJAŻNIJ SIĘ Z ALGORYTMAMI

PRZEWODNIK DLA POCZĄTKUJĄCYCH  
I ŚREDNIO ZAAWANSOWANYCH

 PWN

Projekt okładki i stron tytułowych **Hubert Zacharski**

Ilustracja na okładce **Ph\_Dabphimsri/Shutterstock**

Wydawca **Łukasz Łopuszański**

Redaktor prowadzący **Jolanta Kowalczuk**

Koordynator produkcji **Anna Bączkowska**

Skład i łamanie **Fixpoint**

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo  
Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)  
Polska Izba Książki

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA

Warszawa 2016

ISBN 978-83-01-18466-7

Wydanie I

Warszawa 2016

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2  
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288  
infolinia 801 33 33 88  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl), [www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	XI
<b>Od autora</b> . . . . .	XIII
<b>1. Złożoność czasowa</b> . . . . .	1
Porównanie różnych złożoności czasowych . . . . .	2
Limit czasu . . . . .	3
Złożoność pamięciowa . . . . .	4
Ćwiczenie . . . . .	4
Zadania treningowe . . . . .	5
Żabka ★ . . . . .	5
Chodnik ★★ . . . . .	6
Taśma ★★ . . . . .	7
Rozwiązania . . . . .	8
<b>2. Zliczanie elementów</b> . . . . .	9
Ćwiczenie . . . . .	10
Zadania treningowe . . . . .	11
Permutacja ★ . . . . .	11
Ropucha ★★ . . . . .	12
Przyciski ★★★ . . . . .	13
Rozwiązania . . . . .	14
<b>3. Sumy prefiksowe</b> . . . . .	16
Ćwiczenie . . . . .	17
Zadania treningowe . . . . .	18
Długa taśma ★ . . . . .	18
Samochody ★★ . . . . .	19

Chomiki ★★★	20
Rozwiązania	21
<b>4. Sortowanie</b>	22
Sposób 1: sortowanie przez wybieranie	22
Sposób 2: sortowanie przez zliczanie	23
Sposób 3: sortowanie przez scalanie	24
Funkcje sortujące	24
Ćwiczenie	25
Zadania treningowe	25
Iloczyn ★	25
Gwoździe ★★	26
Tory kolejowe ★★★	27
Rozwiązania	28
<b>5. Stos i kolejka</b>	30
Stos	30
Kolejka	31
Ćwiczenie	32
Zadania treningowe	32
Nawiasy ★★	32
Ryby ★★★	33
Cukiernia ★★★	34
Rozwiązania	35
<b>6. Wyszukiwanie lidera</b>	37
Sprawdzenie kandydata	37
Rozwiązanie o złożoności $O(n^2)$	38
Rozwiązanie o złożoności $O(n \log n)$	38
Rozwiązanie o złożoności $O(n)$	39
Ćwiczenie	40
Zadania treningowe	41
Dwie części ★★	41
Bajtocka flaga ★★★	42
Lider prefiksowy ★★★	43
Rozwiązania	44
<b>7. Spójny podciąg o maksymalnej sumie</b>	45
Rozwiązanie o złożoności $O(n^3)$	45
Rozwiązanie o złożoności $O(n^2)$	46
Rozwiązanie o złożoności $O(n)$	46
Ćwiczenie	47
Zadania treningowe	49
Odchudzanie ★	49
Bilet ★★	49

Praca domowa ★★★ . . . . .	51
Rozwiązania . . . . .	51
<b>8. Liczby pierwsze i złożone . . . . .</b>	<b>53</b>
Liczenie dzielników . . . . .	53
Test pierwszości w czasie $O(\sqrt{n})$ . . . . .	54
Ćwiczenie . . . . .	54
Zadania treningowe . . . . .	56
Obwód ★ . . . . .	56
Szczyty ★★ . . . . .	56
Flagi ★★★ . . . . .	57
Rozwiązania . . . . .	58
<b>9. Sito Eratostenesa . . . . .</b>	<b>61</b>
Faktoryzacja . . . . .	62
Ćwiczenie . . . . .	63
Zadania treningowe . . . . .	64
Tablica liczb ★★ . . . . .	64
Liczby półpierwsze ★★★ . . . . .	64
Liczby doskonałe ★★★ . . . . .	65
Rozwiązania . . . . .	66
<b>10. Algorytm Euklidesa . . . . .</b>	<b>68</b>
Najmniejsza wspólna wielokrotność . . . . .	69
Ćwiczenie . . . . .	69
Zadania treningowe . . . . .	69
Mandarynki ★ . . . . .	69
Wesoła małpka ★★ . . . . .	70
Zbiór pierwszych ★★★ . . . . .	71
Rozwiązania . . . . .	72
<b>11. Ciąg Fibonacciego . . . . .</b>	<b>73</b>
Ćwiczenie . . . . .	74
Zadania treningowe . . . . .	74
Zajęczek ★★ . . . . .	74
Drabina ★★★ . . . . .	75
Spotkanie ★★★ . . . . .	76
Rozwiązania . . . . .	77
<b>12. Wyszukiwanie binarne . . . . .</b>	<b>79</b>
Intuicja . . . . .	79
Implementacja . . . . .	80
Wyszukiwanie binarne po wyniku . . . . .	81
Ćwiczenie . . . . .	81
Zadania treningowe . . . . .	82



Promień ★★ . . . . .	82
Deski ★★★ . . . . .	82
Tort ★★★ . . . . .	83
Rozwiązania . . . . .	85
<b>13. Gąsienica . . . . .</b>	<b>87</b>
Przykład użycia . . . . .	87
Ćwiczenie . . . . .	88
Zadania treningowe . . . . .	89
Smakołyki ★★ . . . . .	89
Wycinek ★★★ . . . . .	90
Temperatura ★★★★★ . . . . .	90
Rozwiązania . . . . .	92
<b>14. Programowanie zachłanne . . . . .</b>	<b>94</b>
Problem wydawania reszty . . . . .	94
Dowodzenie poprawności . . . . .	95
Ćwiczenie . . . . .	95
Zadania treningowe . . . . .	96
Sznurki ★★ . . . . .	96
Bracia ★★★ . . . . .	97
Szklanki ★★★ . . . . .	98
Rozwiązania . . . . .	99
<b>15. Programowanie dynamiczne . . . . .</b>	<b>101</b>
Problem wydawania reszty . . . . .	101
Ćwiczenie . . . . .	103
Zadania treningowe . . . . .	104
Pionek ★ . . . . .	104
Wybrzeże ★★★ . . . . .	105
Ładny ciąg ★★★ . . . . .	106
Rozwiązania . . . . .	107
<b>16. Drzewa binarne . . . . .</b>	<b>110</b>
Pełne drzewo binarne . . . . .	111
Reprezentacja drzew binarnych . . . . .	111
Binarne drzewa wyszukiwania (BST) . . . . .	112
Ćwiczenie . . . . .	112
Zadania treningowe . . . . .	113
Drzewko binarne ★ . . . . .	113
Nieskończone drzewko ★★ . . . . .	114
Drzewko ★★★ . . . . .	115
Rozwiązania . . . . .	116

<b>17. Kolejka priorytetowa</b>	119
Kopiec binarny	119
Wstawienie elementu do kopca $O(\log n)$	120
Usunięcie elementu maksymalnego $O(\log n)$	121
Tworzenie nowego kopca z listy elementów $O(n)$	122
Ćwiczenie	123
Zadania treningowe	124
Emeryci ★★	124
Bilety ★★★	124
Tamy ★★★★★	125
Rozwiązania	127
<b>18. Algorytmy grafowe BFS i DFS</b>	128
Rodzaje grafów	129
Reprezentacja grafu	130
DFS, czyli przeszukiwanie grafu w głąb	132
BFS, czyli przeszukiwanie grafu wszerz	133
Ćwiczenie	134
Zadania treningowe	134
Lista kontaktów ★★	134
Las ★★★	135
Wyprawa króla ★★★★★	136
Rozwiązania	137
<b>A. Kolejne tematy</b>	139
Algorytm Dijkstry	139
Średnica drzewa	139
Zbiory rozłączne	139
Algorytm Prima i Kruskala	139
Sortowanie topologiczne	140
Drzewo licznikowe	140
Szybkie potęgowanie	140
Koszt zamortyzowany	140
Najdłuższy rosnący podciąg	140
Teoria gier	140
Algorytm Knutha–Morrisa–Pratta	141
Haszowanie tekstów	141
Algorytm Karpa–Millera–Rosenberga	141
Szukanie palindromów i algorytm Manachera	141
Najdłuższy wspólny podciąg	141
Programowanie dynamiczne na drzewach	141
Podstawy geometrii obliczeniowej	142
Sortowanie kątowe	142
Otoczka wypukła	142
Para najmniej i najbardziej oddalonych punktów	142

Maski bitowe . . . . .	142
Najniższy wspólny przodek . . . . .	142
Silnie spójne składowe . . . . .	143
Mosty i punkty artykulacji . . . . .	143
Cykl Eulera . . . . .	143
Przepływy i skojarzenia . . . . .	143
<b>B. STL . . . . .</b>	<b>144</b>
Para elementów . . . . .	144
Wektor . . . . .	145
Kolejka . . . . .	148
Kolejka priorytetowa . . . . .	149
Minimum, maksimum i zamiana . . . . .	150
Sortowanie . . . . .	150
Permutacje . . . . .	151
Mieszanie . . . . .	152
Wskaźniki w C++ . . . . .	152
Iteratory . . . . .	153
Wyszukiwanie binarne . . . . .	154
Lista . . . . .	154
Zbiór i multizbiór . . . . .	155
Mapa . . . . .	156
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>157</b>
<b>Skorowidz . . . . .</b>	<b>158</b>
<b>Opinie i komentarze . . . . .</b>	<b>161</b>



## Wprowadzenie

Komputer wkroczył niepostrzeżenie w życie każdego z nas. Prawie codziennie poszukujemy informacji w internecie, komunikujemy się ze znajomymi, wysyłając smsy, rozmawiamy przez Skype'a, kupujemy przez komputer bilety na pociąg lub do kina, bawimy się, grając na nim w gry. Z jednej strony stało się to możliwe dzięki rozwojowi technologii, która doprowadziła do miniaturyzacji urządzeń elektronicznych przy jednoczesnym zwiększaniu ich mocy obliczeniowej — procesory są coraz szybsze i są w stanie przechowywać oraz przetwarzać coraz więcej danych. Z drugiej strony komputer jest tylko urządzeniem elektronicznym o potencjalnie nieskończonych możliwościach, które nie znalazłyby tak powszechnego i szerokiego zastosowania, gdyby nie pomysłowość i umiejętności twórców programów komputerowych. Komputer jest w stanie wykonywać jedynie to, co nakaże mu programista za pomocą programu. Program komputerowy jest precyzyjnym zapisem algorytmu w języku, który jest zrozumiały dla komputera — w języku programowania. Algorytm zaś, potocznie, to precyzyjny przepis opisujący działanie, które może być wykonane przez człowieka, komputer lub inne medium, nie koniecznie rozumiejące istotę podjętego działania. Dziedzinę informatyki, która zajmuje się badaniem algorytmów, nazywa się *algorytmiką*.

Wybitny izraelski informatyk Dawid Harel w swojej znakomitej książce *Rzecz o istocie informatyki*. *Algorytmika* napisał: *Przepisy określiliśmy mianem algorytmów, obszar zaś ludzkich dociekań, wiedzy i doświadczeń dotyczących algorytmów nazwiemy algorytmiką*. I dalej: *Algorytmika to więcej niż dział informatyki. Tkwi ona w centrum wszystkich działów informatyki*. W tym miejscu przypomnijmy jeszcze słowa Donalda Knutha (pierwszego badacza, który zajął się systematycznym badaniem algorytmów) z jego trylogii *Sztuka programowania*: *Proces przygotowywania programu dla komputera cyfrowego jest pociągający nie tylko ze względu na potencjalne korzyści ekono-*

*miczne czy naukowe. Wiązą się z nim również przeżycia estetyczne, podobne do tworzenia poezji lub komponowania muzyki.*

Książka Jacka Tomasiewicza jest znakomitym wprowadzeniem w świat algorytmów i programowania dla początkujących i średnio zaawansowanych, którzy chcą osiągnąć mistrzostwo w najbardziej podstawowym dziale informatyki, jakim jest algorytmika. Znakomicie dobrane zadania i odpowiednie stopniowanie trudności pozwalają początkującym informatykom zapoznać się z podstawowymi metodami projektowania i analizowania algorytmów ze szczególnym uwzględnieniem ich złożoności obliczeniowej. Autor zebrał zadania, które z powodzeniem wykorzystywał na zajęciach z młodymi adeptami algorytmiki ze szkół ponadgimnazjalnych i gimnazjów. Jako młody człowiek, finalista Olimpiady Informatycznej, doskonale rozumie, co jest najtrudniejsze w poznawaniu algorytmiki na początkowym etapie. Dlatego stara się trudne tematy tłumaczyć bez specjalnego formalizmu, językiem w pełni zrozumiałym nawet dla gimnazjalisty.

Książka Jacka Tomasiewicza jest godna polecenia nie tylko wszystkim zainteresowanym algorytmiką i programowaniem. Będzie także pomocna w powszechnym nauczaniu algorytmiki w gimnazjach i szkołach ponadgimnazjalnych. Zbioru zadań z przystępnymi zadaniami algorytmicznymi bardzo brakowało. Gorąco polecam książkę autorstwa Jacka Tomasiewicza!

*prof. dr hab. Krzysztof Diks*

Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Informatycznej  
Instytut Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego