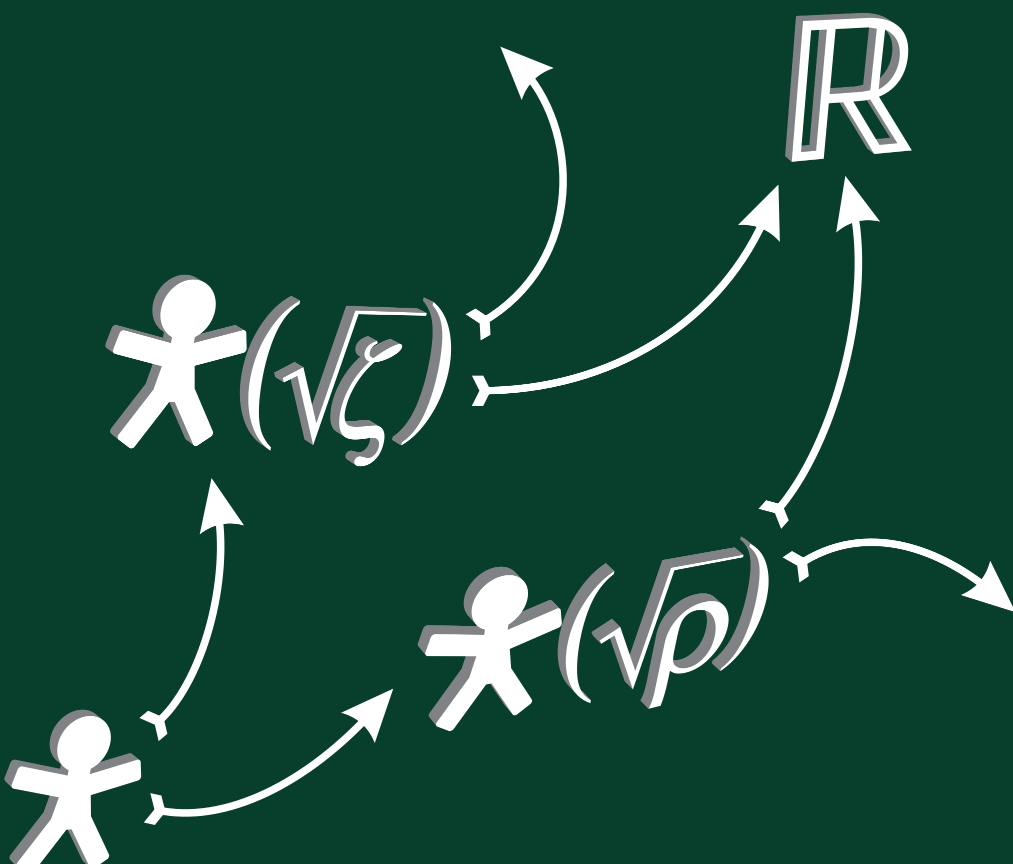
MIECZYSŁAW KULA
ANDRZEJ SŁADEK

TEORIA CIAŁ UPORZĄDKOWANYCH



Wydawnictwo
Uniwersytetu Śląskiego
Katowice 2013

Teoria ciał uporządkowanych

PODRĘCZNIKI
I SKRYPTY
UNIWERSYTETU
ŚLĄSKIEGO
W KATOWICACH

NR 145

Mieczysław Kula, Andrzej Sładek

Teoria ciał uporządkowanych

Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego   Katowice 2013

Redaktor serii: Matematyka
Tomasz Dłotko

Recenzenci
Edmund Puczyłowski
Daniel Simson

Spis treści

Wstęp

Ciało uporządkowane jest strukturą algebraiczną, która w jednym schemacie ujmuje wspólne cechy zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb rzeczywistych.

Obserwując rozwój intelektualny małego dziecka, można zauważyć, że zdolność porównywania liczb pojawia się niemal równocześnie z kształtowaniem samego pojęcia liczby. Początkowo są to liczby naturalne, ale w dalszych etapach edukacji pojawiają się liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste; temu rozszerzaniu pojęcia liczby towarzyszy rozwój umiejętności wykonywania operacji arytmetycznych oraz porównywania liczb. W ten sposób powstaje intuicyjne pojęcie struktury algebraicznej, którą jest zbiór liczb wymiernych lub rzeczywistych z działaniami dodawania i mnożenia wraz z dodatkowo określoną relacją liniowego porządku, zgodną z działaniami. O ile na elementarnym poziomie uporządkowanie zbioru liczb służy jedynie do porównywania cech rzeczy wyrażonych liczbami, o tyle w kolejnych etapach edukacji matematycznej uświadamiamy sobie, że bez uporządkowania ciała liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ niemożliwe byłoby stworzenie np. podstaw rachunku różniczkowego i całkowego funkcji rzeczywistych ani stosowanie metod matematycznych w innych dziedzinach nauki oraz technice. Zatem relacja liniowego porządku, na pozór niealgebraiczna, „uszlachetnia" strukturę algebraiczną ciała. Ta obserwacja w naturalny sposób prowadzi do powstania idei uporządkowanej struktury algebraicznej. Niniejszy podręcznik ma odpowiedzieć na pytanie, kiedy i na ile sposobów można uporządkować dowolne ciało i jaki wpływ na własności ciała ma fakt istnienia porządków. Warto zauważyć, że w polskiej literaturze matematycznej ten temat praktycznie nie występuje.

Impulsem do powstania teorii ciał uporządkowanych było zapewne pytanie, jakie zadał David Hilbert na słynnym Kongresie w Paryżu w 1900 roku, a znane jako 17. problem Hilberta. Zapytał on mianowicie, czy nieujemnie określony wielomian $f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ jest sumą kwadratów funkcji wymiernych z ciała $\mathbb{R}(X_1, ..., X_n)$. Pozytywnej odpowiedzi udzielił Emil Artin (*Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1927), 100–115), korzystając z opublikowanej w tym samym numerze czasopisma wspólnej pracy z Ottonem Schreierem, zawierającej podstawy teorii ciał uporządkowanych. O teorii przez nich stworzonej Nicolas Bourbaki w książce zatytułowanej *Éléments d'histoire des mathématiques* napisał, że „jednym z najdonioślejszych jej rezultatów jest niewątpliwie odkrycie, że istnienie relacji porządkującej nad ciałem związane jest z własnościami czysto algebraicznymi tego ciała". Fundamentalne dla tej teorii jest twierdzenie, które mówi, że ciało można uporządkować wtedy i tylko wtedy, gdy jest formalnie rzeczywiste, co oznacza, że zero nie jest sumą kwadratów niezerowych elementów tego ciała. Opierając sie na doświadczeniu wyniesionym z obcowania z ciałem uporządkowanym $\mathbb{R}$, trudno się domyślić, jakie ciekawe własności mogą pojawić się w przypadku dowolnych ciał uporządkowanych. Ciało $\mathbb{R}$ jest uporządkowane tylko na jeden i to ciągły sposób, jest rozszerzeniem archimedesowym ciała liczb wymiernych, które jest w nim gęste. Jest to raczej wyjątkowy przypadek. Ogólnie, ciało może być uporządkowane na wiele, nawet nieprzeliczalnie wiele sposobów, podczas gdy samo jest przeliczalne. Może również zawierać elementy większe od wszystkich liczb wymiernych czy też odcinki rozłączne z podciałem liczb wymiernych. Drugie ważne twierdzenie Artina i Schreiera mówi, że element ciała jest dodatni w każdym porządku tego ciała wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą kwadratów elementów tego ciała. Twierdzenie to stanowi właśnie jeden z ważnych argumentów w rozwiązaniu 17. problemu Hilberta.

Teoria stworzona przez Artina i Schreiera stała się katalizatorem rozwoju wielu działów matematyki. Wystarczy wspomnieć, że z geometrii algebraicznej wyodrębniła się rzeczywista geometria algebraiczna, a teoria form kwadratowych nad dowolnymi ciałami zyskała nowe narzędzia do badania zachowania się tych form. Pewne ciała uporządkowane, tzw. ciała rzeczywiście domknięte, pojawiły się również w teorii modeli w kontekście zasady Tarskiego, która mówi, że ciała rzeczywiście domknięte są elementarnie równoważne z ciałem liczb rzeczywistych.

Podręcznik składa się z dziesięciu rozdziałów uzupełnionych dwoma dodatkami. Rozpoczynamy, oczywiście, od podstawowych pojęć i przykładów oraz dowodów dwóch wspomnianych wcześniej twierdzeń Artina i Schreiera, zawartych w rozdziale pierwszym, w którym Czytelnik znajdzie także m.in. dyskusję zachowania się porządków ciał przy rozszerzeniach ciał.

Wspomnieliśmy już o wpływie teorii ciał uporządkowanych na teorię form kwadratowych nad tymi ciałami. Rozdział drugi przypomina podstawowe fakty dotyczące teorii form kwadratowych i kończy się omówieniem tej części teorii, która dotyczy form kwadratowych nad ciałami formalnie rzeczywistymi.

Podobne do ciała $\mathbb{R}$ pod pewnymi względami są tzw. ciała rzeczywiście domknięte, które jak $\mathbb{R}$ są ciałami formalnie rzeczywistymi o kowymiarze 2 w swoim algebraicznym domknięciu. Rozdział trzeci podaje charakteryzację takich ciał. Pokazujemy w nim istnienie i jednoznaczność rzeczywistego domknięcia ciała uporządkowanego, które jest odpowiednikiem algebraicznego domknięcia w teorii ciał formalnie rzeczywistych. Podobieństwo ciał rzeczywiście domkniętych do ciała $\mathbb{R}$ wyraża się również w tym, że pewne elementarne twierdzenia analizy matematycznej, przedstawione w podrozdziale 3.4, są prawdziwe nad tymi ciałami.

Różne porządki ciała, a jak wspomnieliśmy ciało może mieć ich wiele, mogą implikować różne własności. Pojęcia takie, jak: gęstość, archimedesowość czy wypukłość, odnoszą się do zbioru uporządkowanego. Te własności w ciałach z ustalonym porządkiem (tzn. ciałach uporządkowanych) dyskutowane są w rozdziale czwartym. Za ich pomocą scharakteryzować można zarówno podciała ciała $\mathbb{R}$, jak i samo ciało $\mathbb{R}$. Jedna ze znanych konstrukcji ciała liczb rzeczywistych wykorzystuje przekroje Dedekinda ciała liczb wymiernych. Oczywiście, pojęcie przekroju Dedekinda ma sens w dowolnym ciele uporządkowanym, jednak zachowanie tych przekrojów może w istotny sposób różnić się od ich zachowania w ciele liczb wymiernych. Mimo to, konstrukcję ciała $\mathbb{R}$ za pomocą przekrojów można naśladować w przypadku dowolnego ciała z ustalonym porządkiem, uzyskując tzw. ciągłe domknięcie tego ciała. Mówiąc ogólnie, konstrukcja ta „zalepia dziury" między klasą dolną i górną pewnych przekrojów Dedekinda, które to w przypadku ciała liczb wymiernych odpowiadają liczbom rzeczywistym. W przypadku ciała rzeczywiście domkniętego przekroje Dedekinda tego ciała wyznaczają wszystkie porządki ciała funkcji wymiernych nad tym ciałem.

W zbiorze porządków ciała formalnie rzeczywistego można wprowadzić topologię, która czyni z tego zbioru przestrzeń boolowską. Rozdział piąty poświęcony jest aspektom topologicznym zbioru porządków. Ze względu na interesujący związek własności algebraicznych ciała z własnościami topologicznymi jego przestrzeni porządków wyróżniamy klasę ciał spełniających SAP (*Strong Approximation Property*). Inne charakteryzacje tej klasy zawarte są w dalszych rozdziałach. Czynimy tu również ważne przygotowania do tego, aby w ostatnim rozdziale pokazać, że każda przestrzeń topologiczna boolowska jest homeomorficzna z przestrzenią porządków pewnego ciała.

Podpierścień wypukły ciała z ustalonym porządkiem okazuje się pierścieniem waluacyjnym, a waluacja wyznaczona przez taki pierścień stanowi nadzwyczaj skuteczne narzędzie do badania własności ciała. Rozdział szósty zawiera podstawowe informacje z teorii waluacji nad dowolnymi ciałami, podczas gdy rozdział następny dotyczy ściśle teorii waluacji nad ciałami formalnie rzeczywistymi. Przedmiotem rozważań są tu waluacje zgodne z porządkiem, tj. takie, które są odwzorowaniami nierosnącymi w grupę wartości tej waluacji. Część rozdziału siódmego poświęcona jest pierścieniom waluacyjnym, których ciała reszt są podciałami ciała $\mathbb{R}$. Kanoniczne odwzorowania w ciała reszt wyznaczone przez te pierścienie waluacyjne, nazywane punktami rzeczywistymi, tworzą przestrzeń ilorazową przestrzeni topologicznej wszystkich porządków ciała.

Punkty rzeczywiste będą odgrywały ważną rolę w rozdziale ósmym, w którym zajmiemy się podaniem rozwiązania 17. problemu Hilberta i przedstawimy uogólnienia tego problemu, polegającego na tym, że zamiast wielomianów nieujemnie określonych na całej dziedzinie, rozważać będziemy wielomiany nieujemnie określone na pewnych podzbiorach dziedziny ich określoności. W rozdziale tym przedstawimy też nieco słabszą wersję twierdzenia Hilberta dotyczącego nieujemnie określonych form ternarnych stopnia 4. Oryginalne twierdzenie mówi, że każda taka forma jest sumą kwadratów trzech form kwadratowych i jego dowód jest stosunkowo trudny. Pokażemy jedynie w miarę elementarny dowód pochodzący od Albrechta Pfistera faktu, że taka forma jest sumą co najwyżej czterech kwadratów form kwadratowych.

W ciele $\mathbb{R}$ zbiór elementów niezerowych dzieli się na te, które są kwadratami i te, które są minus kwadratami. Ciało formalnie rzeczywiste o takiej własności nazywane jest ciałem euklidesowym. Fakt, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ równanie $a^2 + b^2 = x^2$ ma rozwiązanie w oczywisty sposób kojarzy się z twierdzeniem Pitagorasa, stąd ciało, które ma taką własność nazywane jest ciałem pitagorejskim. Rozdział dziewiąty poświęcony jest opisowi pewnych szczególnych klas ciał formalnie rzeczywistych, w tym również ciał euklidesowych i pitagorejskich.

Twierdzenie spektralne dla endomorfizmów samosprzężonych, pewne własności przestrzeni euklidesowych, twierdzenie Rolle'a niezmiennie przywołują na myśl rozważania nad ciałem $\mathbb{R}$, chociaż ich sformułowanie jest możliwe nad dowolnym ciałem uporządkowanym, z tym jednak, że takie uogólnienia nie zawsze są prawdziwe. W ostatnim rozdziale zajmujemy się charakteryzacją tych ciał, dla których twierdzenie spektralne czy też twierdzenie Rolle'a są spełnione. Tu Czytelnik znajdzie też charakteryzację takich ciał, które w geometrii afinicznej dopuszczają aksjomat Pascha.

Porządek ciała jest równocześnie porządkiem grupy addytywnej tego ciała. Celowe zatem w wielu miejscach jest wykorzystywanie gotowych faktów z teorii grup uporządkowanych. Dla wygody Czytelnika zamieściliśmy dodatek D.1, w którym zawarte zostały potrzebne fakty dotyczące abelowych grup uporządkowanych. W całym podręczniku ciało $\mathbb{R}$ wielokrotnie występpuje jako przykład. Chociaż własności tego ciała takie, jak archimedesowość czy też ciągłość, są powszechnie znane z podstawowego kursu analizy matematycznej, to jednak wydaje nam się, że tutaj powinny być szczegółowo uzasadnione. Z tego też względu dołączyliśmy dodatek D.2, w którym przeprowadzona jest konstrukcja ciała $\mathbb{R}$ i udowodnione są wszystkie jego własności służące jako ilustracje w podawanych wcześniej przykładach.

Każdy z rozdziałów kończy się zadaniami, co pozwoli Czytelnikowi sprawdzić i pogłębić zrozumienie przeczytanego materiału.

Podręcznik ma zapoznać studentów kierunków ścisłych oraz pracowników naukowych z podstawami algebry rzeczywistej. Dobierając prezentowany w nim materiał, dołożyliśmy starań, aby był on możliwie kompletny i spójny, tak aby znajomość kursowych wiadomości z algebry i algebry liniowej była wystarczająca do jego lektury. W niewielu przypadkach odsyłamy Czytelnika do pozycji, w których można znaleźć dowody twierdzeń, na jakie powołujemy się w naszej argumentacji. Aby Czytelnik mógł poszerzyć zaprezentowane przez nas wiadomości, dołączyliśmy wykaz literatury uzupełniającej, gdzie znajdzie też bardziej szczegółowe dane bibliograficzne.

Pragniemy podziękować recenzentom Profesorowi Edmundowi Puczyłowskiemu i Profesorowi Danielowi Simsonowi za życzliwe opinie i cenne uwagi, które pomogły usunąć wiele usterek zawartych w pierwotnym tekście podręcznika.

Spis oznaczeń

Skorowidz

Redaktor
Barbara Todos-Burny

Projektant okładki
Przemysław Koprowski

Skład i łamanie
Mieczysław Kula
Andrzej Sładek

ISSN 1644-0552
ISBN 978-83-226-2148-6 (wersja drukowana)
ISBN 978-83-8012-201-7 (wersja elektroniczna)

Wydawca
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice
www.wydawnictwo.us.edu.pl
e-mail: wydawus@us.edu.pl

Wydanie I. Ark. druk. 23,5. Ark. wyd. 27,0
Papier offset. kl. III, 90 g Cena 42 zł (+VAT)

Druk i oprawa: PPHU TOTEM s.c.
M. Rejnowski, J. Zamiara
ul. Jacewska 89, 88-100 Inowrocław

Cena 42 zł (+VAT)

M. Kula · A. Sładek · Teoria ciał uporządkowanych

ISSN 1644-0552
ISBN 978-83-8012-201-7