

SZTUKA ŻYCIA W CHAOSIE

Jak podejmować
dobre decyzje
w świecie niepewności

David
Spiegelhalter

onepress

Tytuł oryginału: The Art of Uncertainty: How to Navigate Chance, Ignorance,
Risk, and Luck

Tłumaczenie: Tomasz Walczak

Projekt okładki: Studio Gravite / Olsztyn
Obarek, Pokoński, Pazdrijowski, Zaprucki

ISBN: 978-83-289-2401-7

Copyright © David Spiegelhalter 2024

The moral right of the author has been asserted.

First published as The Art of Uncertainty in 2024 by Pelican, an imprint of Penguin Press. Penguin Press is part of the Penguin Random House group of companies.

No part of this book may be used or reproduced in any manner for the purpose of training artificial intelligence technologies or systems. This work is reserved from text and data mining (Article 4(3) Directive (EU) 2019/790).

Polish edition copyright © 2025 by Helion S.A.

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiejkolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz wydawca dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz wydawca nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

onepress.pl/user/opinie/sztzyc

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Helion S.A.

ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice

tel. 32 230 98 63

e-mail: onepress@onepress.pl

WWW: onepress.pl (księgarnia internetowa, katalog książek)

Printed in Poland.

- Kup książkę
- Poleć książkę
- Oceń książkę

- Księgarnia internetowa
- Lubię to! » Nasza społeczność

Spis treści

SPIS RYSUNKÓW	5
WPROWADZENIE	17
ROZDZIAŁ 1. Niepewność ma charakter osobisty	33
ROZDZIAŁ 2. Ujmowanie niepewności w formie liczbowej	47
ROZDZIAŁ 3. Radzenie sobie z przypadkowością za pomocą teorii prawdopodobieństwa	74
ROZDZIAŁ 4. Niespodzianki i zbiegi okoliczności	118
ROZDZIAŁ 5. Szczęście	147
ROZDZIAŁ 6. We wszystkim jest trochę przypadku	173
ROZDZIAŁ 7. Podejście bayesowskie	202

ROZDZIAŁ 8.	234
Niepewność w nauce	
ROZDZIAŁ 9.	266
Na ile możemy być pewni wyników analiz?	
ROZDZIAŁ 10.	281
Co lub kogo winić? Przyczynowość, klimat i przestępstwa	
ROZDZIAŁ 11.	312
Prognozowanie przyszłości	
ROZDZIAŁ 12.	345
Ryzyko, porażka i katastrofa	
ROZDZIAŁ 13.	370
Głęboka niepewność	
ROZDZIAŁ 14.	383
Komunikowanie niepewności i ryzyka	
ROZDZIAŁ 15.	408
Podejmowanie decyzji i zarządzanie ryzykiem	
ROZDZIAŁ 16.	438
Przyszłość niepewności	
PRZYPISY	447
SŁOWNICZEK	471

Radzenie sobie z przypadkowością za pomocą teorii prawdopodobieństwa

W poprzednim rozdziale skupiłem się na liczbowym określaniu osobistej niepewności co do konkretnych zdarzeń, opartej na ocenie danej osoby i specyficznej dla niej. Ale jeśli znasz teorię prawdopodobieństwa ze szkoły lub studiów, zapewne uczyłeś się jej w zupełnie inny sposób, na podstawie rzutów monetą, rzutów kostką, loterii i innych sytuacji, w których działa „przypadek”, w tym z uwzględnieniem sławetnych pytań o skarpetki w szufladach.

Nadszedł czas, aby wrócić do tego bardziej tradycyjnego podejścia, historycznie zakorzenionego w grach i hazardzie. Może się to wydawać powrotem do szkoły, ale dzięki prostym grom można intuicyjnie zrozumieć formalne zasady teorii prawdopodobieństwa. Może to pomóc w udzielaniu odpowiedzi na niektóre trudne pytania egzaminacyjne, a nawet w urządzeniu loterii.

Kilka lat temu kupowałem u lokalnego rzeźnika udziec jagnięcy, ale przedstawiłem nietypową prośbę: aby dołączył staw skokowy. Następnie wykonałem niechlujną, bardzo amatorską sekcję i wy dobyłem osadzoną w kostce małą kość, która zapewnia połączenie między nogą a stopą. Jest to *kość skokowa*. Jak widać na zdjęciu z rysunku 3.1, ma ona cztery płaszczyzny, na których może



Rysunek 3.1.

Wycięta przeze mnie jagnięca kość skokowa i cztery możliwe sposoby, w jakie może upaść. Na podstawie 200 rzutów otrzymałem ściankę 1 w 10% rzutów, ściankę 3 w 43%, ściankę 4 w 36% i ściankę 6 w 11%

wylądować w wyniku rzutu. Od co najmniej 5000 lat ludzie z wielu różnych kultur, od Grecji po Mongolię, uprawiali hazard na podstawie rzutów kośćmi lub wykorzystywali je do wróżenia.

Prawdopodobieństwo pojawienia się poszczególnych ścianek nie jest równe. Rzuciłem moją kością 200 razy i uzyskałem wartości procentowe wymienione w podpisie do rysunku 3.1. Historyczka statystyki Florence Nightingale David uzyskała podobne wyniki, wynoszące około 10%, 40%, 40% i 10%^{*}.

Popularną grą wśród Rzymian było rzucanie czterema kośćmi skokowymi i obstawianie wyników. Gdy wszystkie cztery ścianki były różne, rzut nosił nazwę „Wenus”. Kości skokowych używano również do uzyskiwania odpowiedzi od wyroczni w świątyniach, gdzie rzut Wenus uważano za korzystną wróżbę, a rzut „psy” (same ścianki 1) za niekorzystną[†]. Wybitny rzymski historyk Swetoniusz pisał, że poeta Propercjusz powiedział: „Kiedy chciałem wyrzucić korzystną Wenus, przeklęte psy zawsze wyskakiwały”¹.

W hazardzie nieregularnie ukształtowana kość skokowa była stopniowo zastępowana przez bardziej symetryczne kości. Zne są ich terakotowe przykłady z doliny Indusu sprzed około 3000 lat. Kości te miały już liczby od 1 do 6 rozmieszczone zgodnie z obecnym wzorem, w którym suma wartości na przeciwległych ściankach wynosi 7. Jednak choć na wyniki rzutów tymi małymi przedmiotami na ziemię lub stół stawiano ogromne sumy pieniędzy, wydaje się, że aż do 1500 roku nikt nie próbował analitycznie ustalić, co dzieje się w trakcie gry. Prowadzi to do następującego pytania:

^{*} To odpowiednie imię dla statystyczki z uwagi na pionierskie prace Florence Nightingale w zakresie analizy statystycznej i grafiki.

[†] Dla wartości wspomnianych w podpisie rysunku 3.1 prawdopodobieństwo rzutu „Wenus” wynosi około 4%, a rzutu „psy” — 0,01% (1 na 10 000).

Przez tysiąclecia ludzie rzucali przedmiotami i obstawiali sposób, w jaki wypadną. Dlaczego więc koncepcja prawdopodobieństwa ugruntowała się dopiero stosunkowo niedawno?

Podawanych jest wiele wyjaśnień tego osobliwego przypadku, jak to że klasyczne cywilizacje ceniły raczej logiczne dowody niż eksperymenty, że wczesne przedmioty używane w hazardzie, takie jak kości skokowe, nie miały ściśle określonej symetrii, że uważano, iż grami losowymi rządzą bogowie, czy to, że zachodnie systemy liczbowe były nieadekwatne (wyobraź sobie uprawianie matematyki z użyciem cyfr rzymskich) aż do około 1200 roku, kiedy Leonardo z Pizy, lepiej znany jako Fibonacci, spopularyzował system hindusko-arabski, z podstawą 10 i zerem. Niezależnie od przyczyny starożytni nie zastanawiali się nad liczbowym przedstawianiem prawdopodobieństwa.

Być może nie powinno to być zaskoczeniem. Wspomniałem już, że prawdopodobieństwo jest zjawiskiem nieuchwytnym, niemożliwym do bezpośredniej obserwacji i pomiaru. Co więcej, w rozdziale 1. wyjaśniłem, że może ono mieć dwojaką naturę: być miarą niepewności epistemicznej, wyrażającą poziom pewności na temat tego, co mogłoby być znane, ale nie jest, jak również miarą niepewności aleatorycznej, związanej z przyszłymi losowymi wydarzeniami lub szansami wystąpienia zdarzeń, które jeszcze pozostają niewiadomą. I to właśnie dzięki tej drugiej kategorii nastąpił przełom prowadzący do tego, że hazardziści w końcu zaczęli analizować gry, na które stawiali tak dużo pieniędzy.

Gerolamo Cardano żył we Włoszech od około 1500 do 1571 roku, w okresie szybkiego rozwoju sztuki i matematyki nazywanym

renesansem. Był nieślubnym dzieckiem oszpeconym przez dzumą i, jak sam przyznawał, bywał „porywczy, zawzięty i mający słabość do kobiet”. Udało mu się jednak zostać bogatym i sławnym lekarzem².

Zarobił również i stracił wiele pieniędzy na hazardzie, a około 1550 roku zdecydował się zapisać swoją wiedzę w księdze *Liber de ludo aleae* (czyli „Księga gier losowych”)³. W krótkich rozdziałach omawia metody oszukiwania („jeśli chcesz wygrać niesprawiedliwie, niezwykle pomocne jest posiadanie popleczników”)*, rolę szczęścia i różnicę między kartami a kośćmi. Ale jego sława wynika z tego, że jako pierwszy odnotował, iż symetria kości oznacza, że wyrzucenie każdej z liczb powinno być równie prawdopodobne. Ujął to w pozornie nieistotnym zdaniu: „Mogę równie łatwo wyrzucić jeden, trzy lub pięć jak dwa, cztery czy sześć”.

Dzięki **wyliczeniu** wszystkich możliwości bardzo zbliżył się do koncepcji prawdopodobieństwa. Popularną grą było wówczas rzucanie dwiema kośćmi i obstawianie sumy wyników. Cardano dostrzegł, że istnieje 36 możliwych wyników rzutu jedną, a następnie drugą kością, w tym (1,1), (1,2) i tak dalej. Listę wszystkich możliwych rezultatów nazwał „obwodem”. Są one pokazane w tabeli 3.1 wraz z wynikowymi sumami zapisanymi w siatce.

Następnie obliczył liczbę sposobów, w jakie można uzyskać, na przykład, sumę 10. Wynik tych obliczeń podawał jako ułamek łącznej liczby wszystkich możliwych rezultatów: „Sumie 10 odpowiadają rzuty (5,5) i (6,4), ale ten ostatni może wystąpić na dwa sposoby, więc całkowita liczba sposobów uzyskania 10 będzie wynosić $\frac{1}{12}$ obwodu”. Dziś może się to wydawać dość oczywiste, lecz był to ważny krok do uświadomienia, że przy dwóch kościach istnieje

* Ivey przekonał się o tym na własnej skórze, gdy grał w Crockfords.

		Drugi rzut					
		1	2	3	4	5	6
Pierwszy rzut	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Tabela 3.1.

Trzydzieści sześć możliwych rezultatów rzutu dwiema kośćmi z wynikową sumą liczb na ściankach

tylko jeden sposób na wyrzucenie sumy 2, ale wiele możliwych sposobów na uzyskanie na przykład sumy 7.

Tak więc choć Cardano nigdy nie pisał jednoznacznie na ten temat, jest powszechnie uznawany za twórcę „klasycznego” prawdopodobieństwa, nauczanego w szkołach na całym świecie. Dotyczy ono obliczania, jaka część z zestawu równie prawdopodobnych wyników jest „korzystna”. Na przykład jeśli chcesz wyrzucić sumę 7, to 6 z 36 wyników jest „korzystnych”, a zatem prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{6}$.

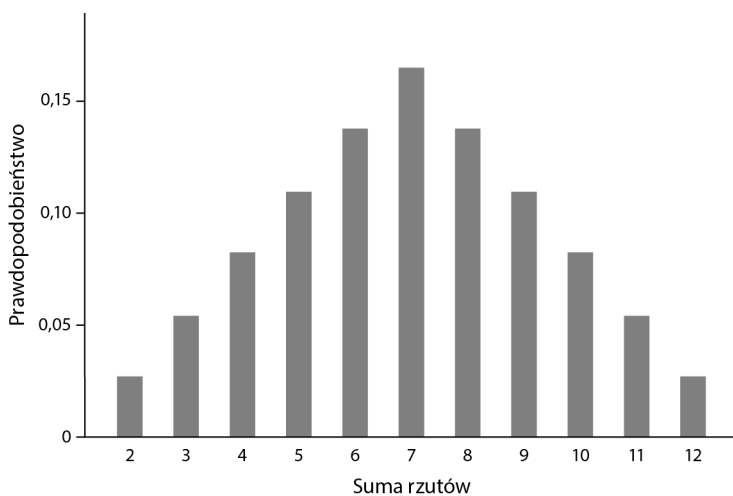
Ważne jest, aby odróżnić surowe *rezultaty* sekwencji rzutów, które można przyjąć za równie prawdopodobne, od wszelkich *zdarzeń* obliczanych na podstawie wyników, na przykład sumy, maksymalnej wartości rzutu, minimalnej wartości rzutu i tak dalej. Każde takie zdarzenie wymaga odwzorowania zestawu prostych rezultatów na pojedynczą liczbę, a technicznym terminem określającym wynikowe zdarzenie jest **zmienna losowa**. Nawet jeśli surowe rezultaty są równie prawdopodobne, z możliwymi wartościami zmiennej losowej jest inaczej, co zauważył Cardano, gdy stwierdził, że istnieją trzy możliwe rezultaty dające w sumie 10.

W ten sposób można uzyskać **rozkład prawdopodobieństwa** dla zmiennej losowej i, za Cardanem, użyć tabeli 3.1, aby uzyskać rozkład dla sumy rzutów dwiema symetrycznymi kośćmi, co ilustruje rysunek 3.2.

Średnia sumy, ważona prawdopodobieństwem wystąpienia każdego zdarzenia, wynosi 7^* . Jest to tak zwana **wartość oczekiwana**

* Oto obliczenia:

$$\begin{aligned} & \left(2 \cdot \frac{1}{36}\right) + \left(3 \cdot \frac{2}{36}\right) + \left(4 \cdot \frac{3}{36}\right) + \left(5 \cdot \frac{4}{36}\right) + \left(6 \cdot \frac{5}{36}\right) + \left(7 \cdot \frac{6}{36}\right) + \left(8 \cdot \frac{5}{36}\right) + \\ & + \left(9 \cdot \frac{4}{36}\right) + \left(10 \cdot \frac{3}{36}\right) + \left(11 \cdot \frac{2}{36}\right) + \left(12 \cdot \frac{1}{36}\right) = 7. \end{aligned}$$

**Rysunek 3.2.**

Rozkład prawdopodobieństwa dla sumy rzutów dwiema kostkami, przy założeniu idealnie symetrycznych kostek oraz uczciwych i niezależnych rzutów

zmiennej losowej, znana również jako jej **średnia**. Będzie ona wielokrotnie pojawiać się w całej książce.

Należy zwrócić uwagę na bezpośrednio podane założenia, zgodnie z którymi: a) kości są symetryczne i rzucane w sposób pozwalający przyjąć, że prawdopodobieństwo wypadnięcia dowolnej liczby oczek jest równe, oraz b) rzuty są **niezależne** (w tym sensie, że wynik pierwszego nie wpływa na drugi). Ciągłe powtarzanie tych uwag stałoby się nużące, ale zawsze należy pamiętać, że każde szacowane prawdopodobieństwo jest uzależnione od wielu założeń.

W kilku kwestiach Cardano się mylił. Chociaż należy docenić, że jednoznacznie podkreślił założenie, że „kość jest uczciwa”, niestety zapomniał uwzględnić tę kwestię w kontekście kości skokowych, kiedy domyślnie założył, iż istnieją równe szanse na wypadnięcie każdej z czterech ścianek. W efekcie stwierdził, że rzut Wenus „wystąpi 6 razy częściej niż rzut, w którym wszystkie ścianki są takie same”. Było to całkowicie błędne oszacowanie. Rysunek 3.1 pokazuje, że dwie ścianki (3 i 4) wypadają znacznie częściej, a zatem na podstawie zaobserwowanych przeze mnie wartości prawdopodobieństwo uzyskania czterech takich samych ścianek wynosi około 5%, w porównaniu z 4% dla scenariusza z czterema różnymi ściankami (rzut Wenus). Fakt, że Cardano tego nie zauważył, sugeruje, iż rzadko (jeśli w ogóle) grał kośćmi skokowymi. Zapewne preferował bardziej wyszukane (i droższe) kości. Uważał również, iż przy symetrycznych kościach „są takie same szanse na to, że dana ścianka pojawi się w serii trzech rzutów, jak na to, że się nie pojawi”. Oznacza to na przykład, że jego zdaniem szansa na wyrzucenie choć jednej trójki w serii trzech rzutów wynosi 50:50. Prawdziwy wynik to 42%, czyli nieco mniej niż 50:50*.

* Przy standardowych zasadach (wymienionych w dalszej części rozdziału) prawdopodobieństwo nieuzyskania ani jednej 3 we wszystkich trzech rzutach

Cardano przeżył 74 lata, ale podobnie jak zdarza się u wielu genialnych ludzi, jego dzieci nie poszły w jego ślady. Jeden syn był przestępcą, który został oficjalnym oprawcą i katem, natomiast drugi, jak na ironię, został stracony za otrucie żony. Dodatkowym nieszczęściem było to, że praca Cardana o grach losowych została opublikowana dopiero w 1663 roku, 90 lat po jego śmierci, a do tego czasu wszystkie jego pomysły zostały już przypisane innym.

W czasach gdy rękopis Cardana leżał nieodnaleziony wśród jego dokumentów, niektóre z najlepszych umysłów w Europie zaczęły pracować nad grami losowymi. Galileusz pisał obszernie (i nudne) teksty o sposobach wyznaczania liczby korzystnych wyników, a w połowie lat 50. XVI wieku Pierre de Fermat i Blaise Pascal prowadzili korespondencję, która jest często uznawana za podstawę teorii prawdopodobieństwa, chociaż (podobnie jak Cardano i Galileusz) zajmowali się oni przede wszystkim wyliczaniem możliwych wyników. Słowo „prawdopodobieństwo” nie było używane w nowoczesnym znaczeniu aż do przełomowej pracy Jacoba Bernoulliego z 1713 roku, *Ars Conjectandi* (czyli „Sztuka przypuszczania”).

Jednym z wyzwań stojących przed Fermatem i Pascalem był przedstawiony 200 lat wcześniej „problem punktów”: jak sprawiedliwie podzielić stawkę po przerwaniu gry? Poniżej omawiam (wysocę fikcyjny) przykład.

wynosi $\left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = 0,58$. Zatem prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednej 3 jest wynosi $1 - 0,58 = 0,42$. Przypuszczalnie Cardano uznał, że skoro spodziewamy się wyrzucenia 3 raz na sześć rzutów, w trzech rzutach powinniśmy mieć 50 na 50 szans na pojawienie się tej liczby. Ale byłoby to prawdą tylko wtedy, gdyby istniała *gwarancja*, że 3 pojawi się na przestrzeni sześciu rzutów, co miałyby miejsce tylko w scenariuszu bez powtórzeń.

Z braku lepszych zajęć Romeo i Julia grają w grę, w której rzucają (uczciwą) monetą. Romeo wygrywa stawkę 80 dukatów, jeśli wcześniej wypadną trzy orły. Z kolei Julia wygrywa, jeżeli najpierw wypadną trzy reszki. Rzucili monetą trzy razy i uzyskali sekwencję ROR. Wstaje świt, Romeo oświadcza, że musi odejść, dlatego przerywają grę. Jak należy podzielić stawkę?

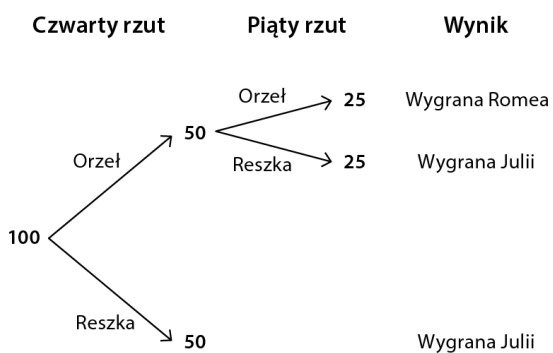
Romeo twierdzi, że stawkę należy podzielić po równo, po 40 dukatów dla każdej strony, ponieważ oboje zachowują szanse na wygraną. Julia zauważa jednak, że jej zdaniem nie jest to sprawiedliwe. Prowadzi i potrzebuje tylko jednej reszki więcej, aby wygrać. Należy obliczyć, jak duża jest szansa na jej wygraną.

Jedną z możliwości jest wymienienie wszystkich możliwych sposobów kontynuacji gry. Jeśli przyjąć, że gra będzie się toczyć do samego końca, dalszy ciąg może wyglądać tak:

- **ROR OO** — wygrywa Romeo,
- **ROR OR** — wygrywa Julia,
- **ROR RR** — wygrywa Julia,
- **ROR RO** — wygrywa Julia.

Jeśli założymy, że moneta jest uczciwa, to wszystkie te „możliwe przyszłości” są równie prawdopodobne, a zatem są szanse trzy z czterech, że wygra Julia.

Wydaje się to nieco niezdarną metodą, ponieważ dwie ostatnie gry mogły zostać zatrzymane po czterech rzutach. Zamiast tego możemy pomyśleć o tym, czego byśmy się spodziewali, gdyby w jakimś dziwacznym scenariuszu Dnia Świstaka zagrali w tę samą grę sto razy. Na rysunku 3.3 jest to zilustrowane w formie *drzewa oczekiwanych wyników*.

**Rysunek 3.3.**

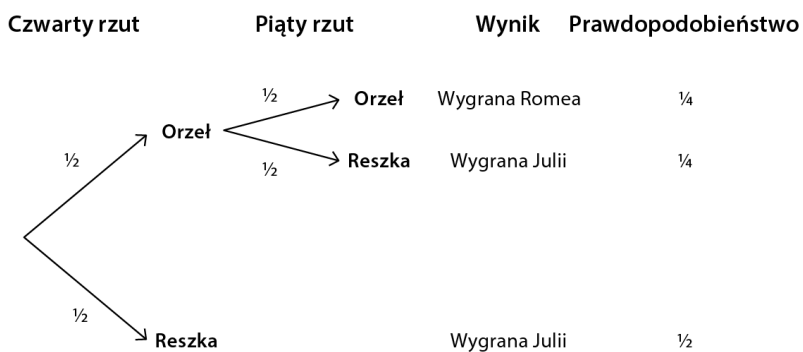
Drzewo oczekiwanych wyników obrazujące, czego można się spodziewać, jeśli przerwana gra Romea i Julii będzie kontynuowana sto razy. Julia wygrywa w 75 na 100 możliwych scenariuszy

Można oczekiwać, że w 50 z kontynuowanych gier Julia wygra w następnym rzucie, a w 25 po dwóch kolejnych rzutach (jeden orzeł i jedna reszka). Nie wiadomo, która z tych równie prawdopodobnych „możliwych przyszłości” wystąpi, a zatem racjonalnie można przyjąć, że prawdopodobieństwo ostatecznej wygranej Julii wynosi $^{75}_{100} = \frac{3}{4}$.

Inną metodą jest narysowanie *drzewa prawdopodobieństwa* (rysunek 3.4), które obrazuje, w jaki sposób mogą powstać różne możliwe wersje przyszłości. W drzewie podane jest zakładane prawdopodobieństwo wyboru każdej ścieżki w dół przy każdym rozgałęzieniu. Prawdopodobieństwo, że w następnym rzucie wypadnie orzeł, wynosi $\frac{1}{2}$. W tym scenariuszu obie strony mają równe szanse i każdy gracz z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ może wygrać w piątym rzucie. Aby dopasować wartości do tych z rysunku 3.3, powinniśmy uzyskać końcowe prawdopodobieństwo wygranej Romea równe $^{25}_{100} = \frac{1}{4}$. Aby je otrzymać, wystarczy pomnożyć prawdopodobieństwa wyboru ścieżek w rozgałęzieniach: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Podobnie aby na rysunku 3.4 dopasować częstotliwość wygranych Julii do wcześniej uzyskanych wartości ($^{75}_{100} = \frac{3}{4}$), wystarczy zsumować liczby na końcach odpowiednich gałęzi: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Przedstawiłem trzy różne sposoby rozwiązywania problemu wygranej: a) wyliczenie wszystkich możliwych przyszłych gier, b) sprawdzenie, co może się wydarzyć przy wielu powtórzeniach, oraz c) obliczenie prawdopodobieństwa dla jednej kontynuowanej gry. W każdym z tych podejść otrzymujemy prawdopodobieństwo wygranej Romea lub Julii w stosunku 25:75. Ale to niekoniecznie określa, jak należy podzielić stawkę.

Należy pamiętać, że wartość oczekiwana zmiennej losowej to średni wynik ważony odpowiednimi prawdopodobieństwami. Gdy gra zostaje przerwana, Romeo ma 25% prawdopodobieństwa wygrania 80 dukatów i 75% prawdopodobieństwa wygrania 0, więc

**Rysunek 3.4.**

Drzewo prawdopodobieństwa dla jednego przebiegu przerwanej gry Romea i Julii. Prawdopodobieństwo wygranej Julii wynosi $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

jego oczekiwana wygrana wynosi $(80 \cdot 25\%) + (0 \cdot 75\%) = 20$. Z kolei oczekiwana wygrana Julii wynosi 60 dukatów. Pascal, Fermat i wszyscy inni matematycy próbujący rozwiązać problem punktów automatycznie zakładali, że sprawiedliwy jest podział stawki zgodnie z oczekiwaną wygraną każdego z uczestników, dlatego Romeo powinien otrzymać 20 dukatów, a Julia 60.

Kwestia decydowania o wyniku przerwanej gry może wydawać się mało istotna, ale ma ogromne znaczenie w dużych turniejach krykieta. Mogą one trwać wiele dni, a gdy gra zostaje przerwana z powodu deszczu lub ciemności, konieczna jest ocena, ile runów należy wyznaczyć jako cel do pokonania przez drużynę przeciwną. Metoda Duckwortha-Lewisa-Sterna (DLS), wymyślona przez statystyków Franka Duckwortha* i Tony'ego Lewisa, określa ten cel jako szacunkową oczekiwaną liczbę runów przy uwzględnieniu dostępnych „zasobów” w postaci wicketów i piłek pozostałych do rozegrania. Metoda ta była wielokrotnie modyfikowana. Obecnie jest dość złożona, a implikacje jej zastosowania nie zawsze są oczywiste. Na przykład w jednodniowym meczu pomiędzy Anglią i Indiami Zachodnimi w 2009 roku w Gujanie trener Indii Zachodnich wycofał swoją drużynę z powodu złego oświetlenia, wierząc, że osiągnęli cel zgodnie z metodą Duckwortha-Lewisa-Sterna. Nie wziął jednak pod uwagę, że jeden z graczy został wyeliminowany przy ostatniej piłce. Ten niefortunny błąd w obliczeniach sprawił, że Anglia wygrała z przewagą jednego runa. Jest to dobra lekcja dla wszystkich, którzy podejmują decyzje na podstawie wzorów.

* Znam Franka. Jest uroczym entuzjastą krykieta, który był zaskoczony zdobyciem międzynarodowej sławy po zakończeniu pracy statystyka w Central Electricity Generating Board i przejściu na emeryturę.

Chociaż pokazane na rysunku 3.3 drzewo prawdopodobieństwa dla gry Romea i Julii może wydawać się intuicyjne i proste, pozwala przedstawić podstawowe zasady prawdopodobieństwa:

1. *Prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia jest liczbą z przedziału od 0 do 1.* Niemożliwe zdarzenia mają prawdopodobieństwo 0 (na przykład wygrana kogoś innego niż Romeo lub Julia), a pewne zdarzenia mają prawdopodobieństwo 1 (wygrana dowolnej ze stron).
2. *„Reguła dopełnienia”.* Prawdopodobieństwo niewystąpienia zdarzenia wynosi 1 minus prawdopodobieństwo jego wystąpienia. Na przykład prawdopodobieństwo wygranej Julii wynosi 1 minus prawdopodobieństwo wygranej Romea: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
3. *Dodawanie, czyli reguła LUB.* Dodaj prawdopodobieństwa wzajemnie wykluczających się zdarzeń (czyli takich, które nie mogą wystąpić w tym samym czasie), aby uzyskać prawdopodobieństwo całkowite. Na przykład prawdopodobieństwo wygranej Julii wynosi $\frac{3}{4}$, ponieważ prowadzi do niej „reszka w czwartym rzucie” o prawdopodobieństwie $\frac{1}{2}$ LUB sekwencja „orzeł + reszka” o prawdopodobieństwie $\frac{1}{4}$.
4. *Mnożenie, czyli reguła I.* Mnożenie prawdopodobieństw pozwala uzyskać ogólne prawdopodobieństwo wystąpienia sekwencji niezależnych zdarzeń (co oznacza, że jedno nie wpływa na drugie). Na przykład prawdopodobieństwo wystąpienia sekwencji orzeł I orzeł wynosi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Te reguły oznaczają, że po narysowaniu drzewa prawdopodobieństwa:

- Aby uzyskać całkowite prawdopodobieństwo dotarcia do końca gałęzi, należy pomnożyć prawdopodobieństwa w punktach rozgałęzień (reguła 4).
- Aby uzyskać całkowite prawdopodobieństwo zdarzenia (na przykład wygranej Julii) $1/2$, należy zsumować całkowite prawdopodobieństwa dla każdej gałęzi prowadzącej do tego zdarzenia (reguła 3).

I to już wszystko! Całą teorię prawdopodobieństwa można podsumować w tych prostych zdaniach. Okazuje się, że te zasady są niezwykle przydatne.

W wielu grach losowych rozsądne jest założenie, że powtarzające się obserwacje są niezależne — wynik pierwszego rzutu monetą nie wpływa na prawdopodobieństwa drugiego. Często jednak potrzebujemy prawdopodobieństw, które zmieniają się w zależności od poprzednich wyników. Jest to tak zwane **prawdopodobieństwo warunkowe**. Na przykład, jak wie każdy karciarz, po rozdaniu asa z talii kart prawdopodobieństwo, że następną kartą też będzie as, spada.

Tak więc, zgodnie z wcześniejszym ostrzeżeniem, pora przejść do skarpetek.

Jestem zbyt leniwy, by łączyć wyprane skarpetki w pary. Pewnego ranka w szufladzie znajdują się wymieszane dwie fioletowe i cztery zielone skarpetki. Bez patrzenia wyjmuję dwie losowe z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymam dopasowaną parę?

Jest to tak zwane *losowanie bez zwracania*, ponieważ zachowuję każdą skarpetkę, którą wybiorę, zamiast odkładać z powrotem do szuflady. Z tego powodu prawdopodobieństwo wylosowania kolejnej skarpetki ulega zmianie. Można skonstruować tabelę podobną do tej dla dwóch kości Cardana (tabela 3.2), należy jednak zauważyć, że kombinacje z niektórych komórek tabeli są niemożliwe do uzyskania, ponieważ ta sama skarpetka nie może zostać wylosowana dwukrotnie.

Możemy również skonstruować drzewo prawdopodobieństwa (rysunek 3.5) dla możliwych wyników. Na przykład istnieje prawdopodobieństwo $2/6 = 1/3$, że pierwsza skarpetka będzie fioletowa. Następnie pozostaje pięć skarpetek, z których jedna jest fioletowa. Dlatego prawdopodobieństwo, że druga też będzie fioletowa, wynosi $1/5$. Reguła 4 mówi, że aby obliczyć ogólne prawdopodobieństwo otrzymania każdego rodzaju pary (fioletowa/fioletowa, fioletowa/zielona, zielona/fioletowa, zielona/zielona), należy pomnożyć prawdopodobieństwa w punktach rozgałęzienia. W ten sposób uzyskasz wartości pokazane po prawej stronie rysunku 3.5. Tak więc całkowite prawdopodobieństwo otrzymania pary (fioletowa + fioletowa) jest równe prawdopodobieństwu, że pierwsza skarpetka będzie fioletowa, pomnożonemu przez warunkowe prawdopodobieństwo, że druga będzie fioletowa w sytuacji, gdy pierwsza była w tym kolorze*. Oto obliczenia: $2/6 \cdot 1/5 = 2/30$.

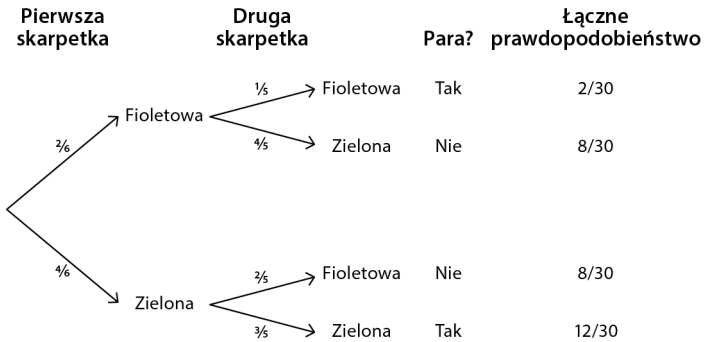
Prawdopodobieństwo otrzymania dopasowanej pary jest, zgodnie z regułą 3, prawdopodobieństwem wylosowania pary (fioletowa + fioletowa) zsumowanym z prawdopodobieństwem wybrania pary

* W notacji matematycznej można to zapisać tak: $Pr(\text{obie skarpetki fioletowe}) = Pr(\text{pierwsza fioletowa}) \cdot Pr(\text{druga fioletowa} \mid \text{pierwsza fioletowa})$, gdzie symbol „ $\mid$ ” należy odczytywać jako „przy” lub „warunkowo dla”.

		Druga skarpetka					
		F1	F2	Z1	Z2	Z3	Z4
Pierwsza skarpetka	F1		Para				
	F2	Para					
	Z1				Para	Para	Para
	Z2			Para		Para	Para
	Z3			Para	Para		Para
	Z4			Para	Para	Para	

Tabela 3.2.

Wszystkie możliwe wyniki losowania dwóch skarpetek spośród dwóch fioletowych (F1 i F2) i czterech zielonych (od Z1 do Z4). Z 30 możliwych wyników, przy założeniu równego prawdopodobieństwa, 14 dają dopasowaną parę skarpet. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania pary wynosi $14/30 = 7/15 = 47\%$

**Rysunek 3.5.**

Drzewo prawdopodobieństwa dla losowego wyboru dwóch skarpetek z szuflady zawierającej dwie fioletowe i cztery zielone sztuki. Prawdopodobieństwo otrzymania dopasowanej pary wynosi $\frac{2}{30} + \frac{12}{30} = \frac{14}{30}$

(zielona + zielona), co daje $\frac{2}{30} + \frac{12}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$. Na szczęście jest to ta sama wartość co uzyskana przez wyliczenie wszystkich możliwości.

Może się wydawać, że są to dość podstawowe zagadnienia. Jednak, o czym przekonasz się dalej, wywołały one wiele wątpliwości, gdy pojawiły się w szkolnym pytaniu egzaminacyjnym.

W jasny, słoneczny poranek w czwartek 4 czerwca 2015 roku ponad 100 000 15- i 16-letnich uczniów w Anglii nerwowo siedziało w salach egzaminacyjnych, aby rozpocząć egzamin Edexcel GCSE Higher Tier Mathematics⁴. Odwrócili kartkę i po zwykłych zadaniach z zakresu geometrii i algebry dotarli do pytania 19., które dotyczyło słodczy Hanny.

W torbie znajduje się n cukierków. Sześć z nich jest pomarańczowych. Pozostałe cukierki są żółte. Hanna bierze losowy cukierek z torby. Zjada go. Następnie losowo wybiera inny cukierek z torby i także go zjada. Prawdopodobieństwo zjedzenia przez Hannę dwóch pomarańczowych cukierków wynosi $\frac{1}{3}$.

- a) Wykaż, że $n^2 - n - 90 = 0$. [3 punkty]
 b) Rozwiąż równanie $n^2 - n - 90 = 0$, aby znaleźć wartość n .
 [3 punkty]

Dla wielu uczniów i ich rodzin pytanie to było nie tylko trudne, ale wręcz zaskakujące. Komentarze w mediach społecznościowych brzmiały: „Że cooooo, skąd się to w ogóle wzięło?!” i „Dlaczego, Hanno, dlaczego musisz mieć te słodczy?”⁵. Petycja dotycząca zmiany zasad oceniania przez Edexcel została podpisana przez tysiące osób, a słodczy Hanny stały się tematem dyskusji w całym

kraju. Rozwiązania prezentowano w telewizji i mediach informacyjnych. A teraz wyobraź sobie, że masz 16 lat i znów znajdujesz się w sali egzaminacyjnej. Czy potrafisz rozwiązać problem słodczy Hanny? Spróbuj to zrobić, zanim przeczytasz rozwiązanie, w którym wykorzystano algebrę na poziomie oczekiwanym od uczniów.

Rozwiązanie zadania ze słodczymi Hanny

Jest n cukierków, z których 6 jest pomarańczowych. Tak więc prawdopodobieństwo, że pierwszy cukierek jest pomarańczowy, wynosi $\frac{6}{n}$. Po zjedzeniu przez Hannę tego cukierka pozostaje $n - 1$ cukierków, z których 5 jest pomarańczowych. Zatem prawdopodobieństwo, że drugi cukierek też jest pomarańczowy, to $\frac{5}{(n-1)}$. Prawdopodobieństwo, że oba cukierki są pomarańczowe, jest równe iloczynowi tych prawdopodobieństw i wynosi $\frac{1}{3}$. Zatem:

$$\frac{1}{3} = \frac{6}{n} \cdot \frac{5}{(n-1)}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$n \cdot (n - 1) = 90$$

Oznacza to, że:

$$n^2 - n - 90 = 0$$

Postać ta jest zgodna z wymaganiami dla części a. W części b. można rozwiązać to równanie kwadratowe za pomocą standardowego wzoru (który został podany w arkuszu egzaminacyjnym) lub zauważyć, czy równanie można przekształcić do postaci:

$$(n - 10)(n + 9) = 0$$

Aby to było prawdą, n musi wynosić albo 10, albo -9 . Ponieważ n musi być dodatnie, wnioskujemy, że w torbie było $n = 10$ cukierków: 6 pomarańczowych i 4 żółte.

I kolejne 6 punktów na egzaminie GCSE Mathematics zdobyte!

*

Wszystkie te przykłady bazują na wyliczaniu równie prawdopodobnych wyników, co czasem bywa skomplikowane. Niestety oznacza to, że sposoby wyznaczania liczby „permutacji i kombinacji” stały się główną i ogólnie niepopularną częścią programu nauczania prawdopodobieństwa, pomimo tego, iż te techniki nie mają nic wspólnego z niepewnością. Pewna znajomość tego podejścia jest jednak przydatna, więc z góry przepraszam, ale zaprezentuję je teraz bardziej szczegółowo.

W ramach prostego przykładu założmy, że zapomniałem czterocyfrowego numeru PIN do nowej karty kredytowej, ale pamiętam, że zawiera on cyfry 6, 7, 8 i 9 w jakiejś kolejności. Stoję przed bankomatem. Ile prób będę potrzebował, aby mieć pewność, że wprowadziłem prawidłowy kod?

Jest to kolejny problem „losowania bez zwracania”. Pierwsza wprowadzana cyfra może być dowolną z czterech możliwych. Druga może być dowolną z trzech pozostałych, trzecia może być jedną z dwóch ostatnich, a przy ostatniej cyfrze nie mam już wyboru. Oznacza to, że istnieją:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

* Chociaż w praktyce po kilku próbach karta prawdopodobnie zostanie zablokowana.

różne liczby, które mogą wprowadzić. Są to permutacje cyfr 6, 7, 8, 9, na przykład 6789, 6879, 6897 itd. Istnieje przydatna notacja matematyczna do zapisu całkowitej liczby permutacji: $4!$, czyli „4 silnia”. Ogólna zasada mówi, że jeśli danych jest n elementów, to istnieje $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$ sposobów ich uporządkowania. Przydatną, choć na pozór dziwną konwencją jest przypisanie wyrażeniu $0!$ wartości 1.

Następny przykład ilustruje, że wartość n silnia może być niezwykle duża.

Weź talię kart i dobrze je potasuj. Czy kiedykolwiek, w całej historii, ktoś po dobrym potasowaniu ułożył je w dokładnie takiej samej kolejności?

W wyniku tasowania 52 karty z talii zostały ułożone w określonej kolejności. Z ogólnej zasady dotyczącej permutacji wynika, że istnieje:

$$52 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 1 = 52!$$

różnych kolejności. Jeśli zaczniesz obliczać wynik na kalkulatorze, szybko otrzymasz bardzo dużą liczbę. Wynik to około $8 \cdot 10^{67}$, czyli 8 z 67 zerami. Jest to trochę więcej, niż wynosi liczba atomów w naszej galaktyce, Drodze Mlecznej⁶.

Szacuje się, że na Ziemi żyło około 100 miliardów ludzi. Załóżmy (ze sporą przesadą), że żyli oni średnio 70 lat (w języku biblijnym można by powiedzieć: „po trzykroć dwadzieścia i jeszcze dziesięć lat”). Gdyby każdy z nich przez całe życie nie robił nic oprócz tasowania co 10 sekund talii, otrzymalibyśmy tylko $2 \cdot 10^{19}$ potasowanych talii. Jest to oczywiście zdecydowanie zawyżone oszacowanie

rzeczywistej liczby tasowań w historii, ale nawet przy tych założeniach prawdopodobieństwo dopasowania któregoś z nich do konkretnego tasowania wynosi tylko 1 do 10^{48} .

Tak więc prawie na pewno nikt w historii nie potasował kart tak jak Ty. Stephen Fry w programie telewizyjnym *QI* kategorycznie stwierdził, że nikt nigdy nie wykonał takiego tasowania jak on⁷, ale nie można mieć całkowitej pewności w sensie logicznym. Istnieje prawdopodobieństwo, że w całej historii zdarzyły się dwa identyczne tasowania, ale w praktyce jest ono prawie zerowe*.

Być może wyczuwasz mój brak entuzjazmu dla nauczania metod wyliczania zamiast ważnych koncepcji związanych z prawdopodobieństwem. Nie sposób jednak zaprzeczyć, że obliczanie, na ile sposobów można uporządkować elementy, odegrało fundamentalną rolę w rozwoju teorii prawdopodobieństwa i nauk statystycznych. Technika ta jest niezbędna także przy projektowaniu loterii.

Następne pytanie pochodzi z 1700 roku i stanowi jeden z aspektów ważnego przełomu intelektualnego, który nawet dziś wpływa na wiele obszarów modelowania statystycznego.

Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania określonej liczby orłów w wyniku wielokrotnego rzutu uczciwą monetą?

Jeśli założyć, że każdy rzut jest niezależny, a orzeł występuje z prawdopodobieństwem $1/2$, to prawdopodobieństwo wystąpienia każdej konkretnej sekwencji jest identyczne. Na przykład przy czterech rzutach sekwencja OOO jest tak samo prawdopodobna jak ORRO.

* Przy założeniu niedorzecznej liczby $2 \cdot 10^{19}$ tasowań w historii daje to $2 \cdot 10^{38}$ możliwych par tasowań. Oznacza to, że istnieje mniej niż $2 \cdot 10^{38} / 8 \cdot 10^{67} \approx 1$ do 10^{29} szans na to, że dwa tasowania w całej historii gry w karty będą takie same.

Dla każdej z nich prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Może wydawać się to nieintuicyjne, ponieważ druga sekwencja wygląda bardziej „typowo” niż ta, w której występują tylko orły. Podobnie wylosowanie w loterii numerów (27, 22, 6, 48, 50, 7) może wydawać się bardziej prawdopodobne niż otrzymanie sekwencji (1, 2, 3, 4, 5, 6). Jednak intuicja jest w tym przykładzie błędna (podobnie jak w wielu innych przypadkach w dziedziny prawdopodobieństwa).

Jeśli jednak zmienną losową jest tylko *liczba* orłów, a nie konkretne sekwencje, to możliwe zdarzenia nie są już tak samo prawdopodobne. Bardziej prawdopodobne jest, że otrzymamy dwa orły i dwie reszki, niż że same orły (tym razem intuicja jest trafna). Ale o ile bardziej prawdopodobne?

Jeśli chcemy uzyskać rozkład tej zmiennej losowej, to podobnie jak przy rzucie dwiema kostkami Cardana należy ustalić liczbę sposobów na uzyskanie określonej łącznej liczby orłów. Na szczęście można to określić za pomocą metody, która stała się znana jako „trójkąt Pascala”, mimo że sam Pascal przyznał, iż jej nie wymyślił. Nawiasem mówiąc, jest to dobry przykład *prawa eponimii Stiglera*, zgodnie z którym większość odkryć nazwanych czymś imieniem nie została w rzeczywistości wymyślona przez tę osobę. Historyk statystyki Stephen Stigler przyznaje, że to nie on wymyślił to prawo⁸.

Rysunek 3.6 przedstawia kilka pierwszych wierszy trójkąta o ciekawym schemacie. Każda jego komórka zawiera sumę dwóch komórek znajdujących się nad nią.

Na przykład jeśli rzucisz cztery razy monetą, w wierszu 4 zobaczysz, że istnieje 16 możliwych sekwencji. Wśród nich są:

Wiersz

0				1				
1				1		1		
2			1		2		1	
3			1		3		3	
4		1		4		6		1
5	1		5		10		10	
6	1		6		15		15	
	6	1		6		15		1

Rysunek 3.6.

Trójkąt Pascala. Wiersz n zawiera liczbę sposobów na uzyskanie konkretnej liczby zdarzeń w sekwencji obejmującej n możliwości

- 1 sposób na uzyskanie 0 orłów (RRRR);
- 4 sposoby na uzyskanie 1 orła (ORRR, RORR, RROR, RRRO);
- 6 sposobów na uzyskanie 2 orłów (OORR, OROR, ORRO, ROOR, RORO, RROO);
- 4 sposoby na uzyskanie 3 orłów (OOOR, OORO, OROO, ROOO);
- 1 sposób na uzyskanie 4 orłów (OOOO).

Ponieważ każda konkretna sekwencja jest równie prawdopodobna, oznacza to, że prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów jest sześć razy większe niż prawdopodobieństwo nieotrzymania żadnego orła.

W tym kontekście przydatna jest określona notacja. Z góry przepaszam, jeśli wygląda ona na skomplikowaną. R -ty element w n -tym wierszu trójkąta określa liczbę sposobów wyboru r różnych elementów z puli o liczności n . Wartość ta jest obliczana zgodnie z podstawowym wzorem: ${}_nC_r$ lub $\binom{n}{r}$, gdzie $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Na przykład jeśli 12 dzieci stoi przy drabinkach na lekcji wf-u i chcemy wybrać pięcioosobową drużynę, istnieje ${}_{12}C_5 = \binom{12}{5} = 792$ różnych drużyn, które można wybrać.

Liczba orłów w sekwencji rzutów monetą jest zgodna z tak zwanym **rozkładem dwumianowym**[†], a przykłady przedstawiam na rysunku 3.7. Wysokości słupków są proporcjonalne do wartości w trójkącie Pascala, nazywanych współczynnikami dwumianowymi.

^{*} Dla n rzutów liczba sekwencji o dokładnie r orłach, czyli $(n-r)$ reszkach, wynosi ${}_nC_r$. Na przykład $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6$.

[†] Rozkład dwumianowy rzutów monetą pozwala określić prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie r orłów w n rzutach w następujący sposób:

$$\binom{n}{r} \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{1}{2^n}.$$

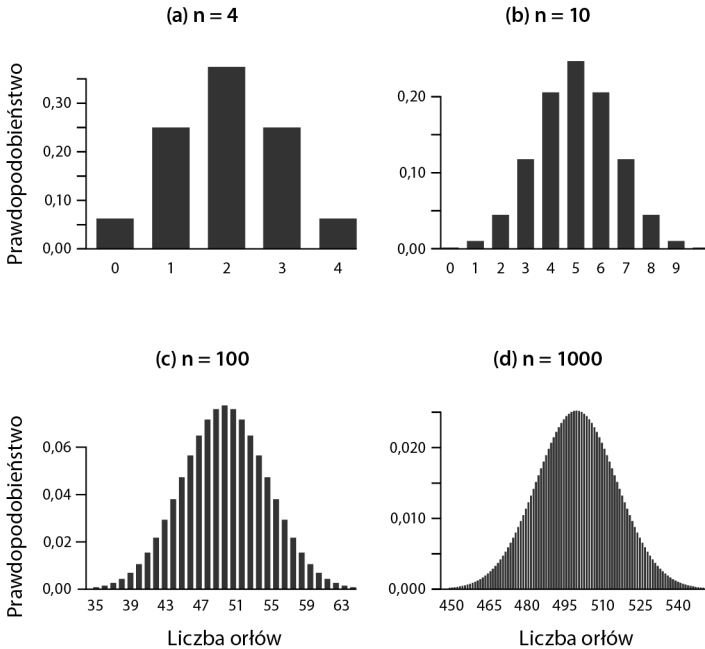
Rozkłady te pozwalają oszacować prawdopodobieństwo różnych odchyłeń od dokładnie równego podziału na orły i reszki. Na przykład dla 100 rzutów jest 6% prawdopodobieństwa na uzyskanie podziału 60:40 lub bardziej skrajnego na korzyść orłów lub reszek.

Te obliczenia mogą stać się bardzo skomplikowane, ale na szczęście prawie 300 lat temu matematyk Abraham de Moivre zdał sobie sprawę, że dla większych n istnieje zgrabne gładkie przybliżenie rozkładu dwumianowego, co ilustruje łagodna krzywa dla 1000 rzutów na rysunku 3.7(d). Najpierw muszę jednak wprowadzić pojęcie **wariancji** rozkładu, która jest jednym z podsumowań jego rozproszenia*. Gładkie przybliżenie znalezione przez de Moivre'a jest obecnie znane jako **rozkład normalny lub gaussowski** i ma taką samą wartość oczekiwaną (średnią) i wariancję jak rozkład dwumianowy.

Co ciekawe, ze wzoru na rozkład normalny otrzymujemy, że prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie takiej samej liczby orłów i reszek wynosi w przybliżeniu $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$ †. Interesujące jest to, że π , stosunek obwodu koła do jego średnicy, jest tak ściśle związany z szansą uzyskania równej liczby orłów i reszek.

* Wariancja rozkładu to oczekiwany kwadrat odchylenia zmiennej losowej od jej średniej. Rozkład liczby orłów w n rzutach uczciwą monetą ma średnią $n/2$ i wariancję $n/4$. **Odchylenie standardowe** jest pierwiastkiem kwadratowym wariancji, a więc jest rodzajem średniej odległości każdej obserwacji od średniej.

† Rozkład normalny o średniej m i wariancji v jest dany wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp \left[-\frac{1}{2} (x - m)^2 / v \right]$. Dla $x = m$ (czyli przy zaobserwowaniu oczekiwanej liczby orłów) i wariancji $n/4$ po podstawieniu otrzymujemy $f(m) = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}$.

**Rysunek 3.7.**

Dwumianowy rozkład prawdopodobieństwa liczby orłów w n rzutach uczciwą monetą. Dla dużych n rozkład ten dąży do gładkiej krzywej zbliżonej do rozkładu normalnego

W jaki sposób umiejętności matematyczne Casanovy doprowadziły do przeprowadzenia udanej loterii?

Giacomo Casanova jest słynny jako kochanek, hazardzista i poszukiwacz przygód. Mniej znane są jego wybitne umiejętności w zakresie matematyki i rachunku prawdopodobieństwa. Kiedy w 1757 roku po głośnej ucieczce z weneckiego więzienia trafił do Paryża, zarówno swoje talenty analityczne, jak i umiejętność perswazji wykorzystał w zarządzaniu pracami państwowej loterii narodowej, która miała sfinansować École Militaire⁹. W loterii wykorzystywano „koło fortuny” zawierające kule z numerami od 1 do 90. Losowano pięć kul (obecnie ten model jest nazywany loterią $5/90$). Gracze mogli kupować zakłady na konkretne liczby: jedną, dwie lub trzy. Gdy zostały one wylosowane, gracz otrzymywał ustaloną nagrodę. Casanova wyjaśnił, że nie każde losowanie przyniesie rządowi zysk, ale twierdził, iż przy sugerowanych przez niego wypłatach daje gwarancję zarobku w dłuższej perspektywie.

Byłoby to lekkomyślne podejście, gdyby Casanova nie znał prawdopodobieństwa osiągnięcia zysku. Ale w połowie XVIII wieku istniały już techniki obliczania szansy na wygraną w loterii przy użyciu opisanych wcześniej wzorów na kombinacje. Casanova posiadał wystarczające umiejętności, by obliczyć szanse przedstawione w tabeli 3.3 i zalecić wypłaty, które powinny przynieść zysk¹⁰.

Załóżmy, że kupujesz los z dwiema liczbami, na przykład 20 i 42. Istnieje ${}_{90}C_2 = 4005$ możliwych losów z dwiema liczbami, które

<i>Typ zakładu (r)</i>	<i>Liczba możliwych kuponów: 90Cr</i>	<i>Liczba zwycięskich kuponów: 5Cr</i>	<i>Szansa na to, że liczby znajdą się wśród 5 wylosowanych</i>	<i>Nagroda za zwycięski kupon</i>	<i>Nagrody względem szansy</i>
Jedna liczba (<i>extrait</i>)	90	5	1 na 18	15	$15/18 = 83\%$
Dwie liczby (<i>ambe</i>)	4005	10	1 na 400,5	270	$270/400,5 = 67\%$
Trzy liczby (<i>terne</i>)	117 480	10	1 na 11 748	5200	$5200/11\,748 = 44\%$

Tabela 3.3.

Loteria Casanova, w której wybiera się jedną, dwie lub trzy liczby z przedziału od 1 do 90. Losowanych jest pięć kul, a kupon wygrywa, jeśli znajdują się na nim wybrane liczby

można kupić*. Zwycięskie liczby muszą pojawić się wśród pięciu wylosowanych kul, istnieje więc ${}_5C_2 = 10$ zwycięskich par. Tak więc wygraną daje $^{10}/_{4005}$, czyli 1 na 400,5 losu z dwiema liczbami. Jest to szansa na wybór jednej ze zwycięskich par.

Casanova starannie dobrał poziom nagród. Na przykład w przypadku losów z trzema liczbami, które kosztują, założmy, jednego liwra za sztukę, można oczekiwać wygranej 1 na 11 748 losów. Jeśli wygrana za taki los wynosi 5200 liwrów, oznacza to, że średnio tylko 44% pieniędzy postawionych na losy z trzema liczbami zostanie wypłacone w postaci nagród. Jest zatem pewne, że w dłuższej perspektywie loteria przyniesie zyski, choć nie ma gwarancji, iż będzie tak w każdym losowaniu. Sumarycznie loteria Casanovy wypłacała w nagrodach 72% wpływów, czyli znacznie więcej niż obecne loterie w Wielkiej Brytanii, które wypłacają około połowy postawionych pieniędzy¹¹.

Loteria Casanovy okazała się wielkim sukcesem i zarobiła dla rządu ogromne kwoty. W pewnym momencie zapewniała 4% dochodu narodowego. Ze stosunkowo niewielkimi zmianami działała od 1758 do 1836 roku. Losowań nie zakłóciły ani szturm na Bastylię w 1789 roku, ani egzekucja Ludwika XVI w 1791 roku, chociaż nastąpiła chwilowa przerwa, gdy w okresie rewolucyjnego terroru na trzy lata zakazano urządzania wszelkich loterii. Była to przekonująca demonstracja znaczenia starannej oceny prawdopodobieństwa. Casanova kontynuował awanturnicze życie pełne romansów, hazardu i nieudanych przedsięwzięć biznesowych,

* Z ogólnego wzoru kombinatorycznego wynika, że ${}_{90}C_2 = 90!/(88! \cdot 2!) = ({}^{90-89})/2 = 4005$. Oto inny sposób na uzyskanie tego wyniku: wiadomo, że istnieje 90 możliwości wyboru pierwszej liczby i 89 drugiej. Oznacza to jednak, że każda para liczb będzie reprezentowana dwukrotnie, na przykład (29, 62) i (62, 29), a zatem wynik trzeba podzielić przez 2, aby uzyskać $({}^{90-89})/2 = 4005$ niepowtarzalnych losów z dwiema liczbami.

a dzięki pamiętnikom zyskał wieczną sławę, choć niestety nie dzięki zdolnościom matematycznym.

Ten rozdział dotyczył tylko sytuacji, w których można założyć równe prawdopodobieństwo wyników i ocenić prawdopodobieństwo zdarzeń na podstawie prostego ustalenia liczby możliwych „korzystnych” wyników. Są to jednak bardzo restrykcyjne warunki. Na początku XVIII wieku szwajcarski matematyk Jacob Bernoulli wymyślił **próbę Bernoulliego**, czyli eksperyment ze zmienną losową (o wartości 1, jeśli zdarzenie wystąpi, i wartości 0, jeżeli tak się nie stanie) i prawdopodobieństwem p . Na przykład jeśli przy rzucie kostką istotne jest tylko to, czy wypadła 6, p wynosi $1/6$. Jeśli p jest różne od $1/2$, wówczas wszystkie możliwe sekwencje nie są już tak samo prawdopodobne, a całkowita liczba wystąpień pożądanego zdarzenia jest określona przez rozkład dwumianowy dla ogólnego p^* . Wzór pozwala obliczyć na przykład prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie dwóch szóstek w 12 rzutach kostką (wynosi ono $0,3$)[†].

Bernoulli opracował również słynne *prawo wielkich liczb*, które mówi, że przy rosnącej liczbie niezależnych prób Bernoulliego odsetek wystąpień zdarzenia dąży do p . Na przykład jeśli 30% populacji wierzy, że Ziemia jest płaska, to gdy weźmiemy wystarczająco dużą próbę losową i zapytamy o zdanie, wówczas zaobserwowany odsetek płaskoziemców w próbie będzie bliski 30%. Zakłada to oczywiście, że nie wprowadzamy systematycznego błędu do próby, na

* Rozkład dwumianowy dla liczby r sukcesów w n próbach, z których każda ma prawdopodobieństwem p , jest dany wzorem:

$$f(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}.$$

† Na podstawie wzoru na rozkład dwumianowy otrzymujemy:

$$f(2) = \binom{12}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{12 \cdot 11}{2} 5^{10} / 6^{12} = 0,30.$$

przykład przez zadawanie pytań tylko uczestnikom zjazdu płaskoziemców.

Wraz ze wzrostem wielkości próby obserwowany odsetek będzie się wahał, zanim zbliży się do 30%. *Błąd hazardzisty* polega na przyjmowaniu, że istnieje jakiś magiczny proces, dzięki któremu początkowa nierównowaga jest niwelowana. Klasycznym przykładem tego błędu jest twierdzenie, że określony numer w loterii lub kolor w ruletce „powinien” wypaść, ponieważ nie pojawiał się przez jakiś czas. W rzeczywistości lepiej jest przyjąć, że początkowa nierównowaga *zanika*, niż że jest *korygowana*.

Teoria prawdopodobieństwa może pomóc określić, jak blisko powinniśmy być nieznanego prawdziwego p , a na tej podstawie można obliczyć szacunki i przedziały dla p . Statystyka jest zatem sposobem na uwzględnienie niepewności związanej z próbkowaniem i wykorzystanie teorii prawdopodobieństwa do wnioskowania o podstawowych stanach świata*. Jest to wielkie osiągnięcie, w całości oparte na niezwyklej pracy kilku geniuszy analizujących gry losowe ponad 300 lat temu.

Później nastąpił dalszy rozwój teorii prawdopodobieństwa. W latach 30. XX wieku rosyjski matematyk Kołmogorow opracował ściślejsze podstawy dla głównych reguł. Ale chociaż pomogło to uporządkować kwestie związane z matematyką, nie dało odpowiedzi na podstawowe pytanie:

Czym tak naprawdę jest prawdopodobieństwo?!

Uwaga, teraz czeka Cię trochę filozofii, ale nie poddawaj się!

* Dużo więcej na ten temat dowiesz się z książki *The Art of Statistics*.

W tradycyjnym ujęciu, którego uczono pokolenia studentów, prawdopodobieństwo było traktowane jako *obiektywna* cecha świata, wprowadzająca regularność w pozornie nieprzewidywalne zdarzenia. Oto niektóre z proponowanych opisów prawdopodobieństwa:

- **Prawdopodobieństwo klasyczne**, oparte na symetrii, używane w przedstawionych przykładach z monetami, kośćmi lub loterią. Pozwala analizować gry losowe przez wyliczanie zdarzeń o równym prawdopodobieństwie. Jest to jednak błędne koło, ponieważ wymaga oceny „równego prawdopodobieństwa”.
- **Prawdopodobieństwo oparte na częstości**, będące teoretyczną proporcją zdarzeń, którą można zaobserwować przy nieskończonej liczbie powtórzeń identycznych sytuacji. Podejście to jest szeroko stosowane w badaniach naukowych, które aspirują do miana „obiektywnych”. Jednak w konkretnej sytuacji każde pojedyncze zdarzenie trzeba przypisać do *klasy referencyjnej* zdarzeń, co do których zakłada się, że mają takie samo prawdopodobieństwo. Wybór tej klasy zawsze jest związany z osądem, choć rzadko jest to bezpośrednio podkreślane.
- **Prawdopodobieństwo oparte na tendencji**. Zgodnie z tą koncepcją istnieje bazowa tendencja do wystąpienia określonego zdarzenia w danym kontekście, na przykład zawału serca w ciągu najbliższych 10 lat. Choć ta nieco mistyczna i nieweryfikowalna idea pozwala na uznanie jednostkowych prawdopodobieństw za obiektywne, nie może mieć zastosowania dla prawdopodobieństwa epistemicznego.

- **Prawdopodobieństwo logiczne** to obiektywny stopień, w jakim zestaw warunków wstępnych logicznie implikuje wnioski. Może ono prowadzić na przykład do uzasadnionego przekonania, że w rzuconej i zakrytej monecie z prawdopodobieństwem 50:50 wypadł orzeł.

Należy jednak zauważyć, że wszystkie te pozornie „obiektywne” interpretacje prawdopodobieństwa wymagają przyjęcia istotnych założeń, aby rzeczywiście przypisać mu wartości liczbowe.

Zasadniczo odmienną perspektywą, którą przyjmuję od początku tej książki, jest to, że prawdopodobieństwo to *subiektywne* ilościowe ujęcie osobistego poziomu niepewności lub czegoś, co można nazwać „częściowym przekonaniem”. Nadal jednak trzeba zdefiniować, co mamy na myśli, kiedy mówimy na przykład, że według giełd zakładów prawdopodobieństwo wygranej Donalda Trumpa w wyborach prezydenckich w Stanach Zjednoczonych w 2024 roku wynosi około 40% (jest to stan z czasu powstawania tego tekstu, czyli z grudnia 2023 roku; celowo wybrałem przykład, dla którego osoby czytające tę książkę w przyszłości będą znać prawdę).

Pierwsze definicje dotyczą „racjonalnego” podejmowania decyzji:

- **Brak preferencji przy obstawianiu wydarzenia o „znanym” prawdopodobieństwie.** Podobnie jak w klasycznym prawdopodobieństwie wykorzystywana jest koncepcja „równie prawdopodobnych” zdarzeń. Tu używany jest generator liczb losowych zwracający z równym prawdopodobieństwem wartości z przedziału od 0 do 1. Następnie można sprawdzić, czy nie masz preferencji między obstawieniem, że Trump zostanie następnym prezydentem albo że generator zwróci liczbę

0,4 lub mniejszą. Jest to elektroniczny odpowiednik tekturowego koła prawdopodobieństwa wspomnianego w rozdziale 2.

- **Rozsądne kursy zakładów.** W 1926 roku Frank Ramsey^{*} wykazał, że wszystkie prawa prawdopodobieństwa można wyprowadzić z wyrażonych preferencji dla określonych zakładów. Rezultatom przypisywana jest „użyteczność”, a wartość zakładu można określić przez jego oczekiwaną użyteczność, gdzie wagi wartości oczekiwanej są wyznaczone przez subiektywne liczby wyrażające częściowe przekonania (czyli osobiste prawdopodobieństwo). Tak więc, przy uwzględnieniu osobistego wartościowania pieniędzy (rozdział 15.), prawdopodobieństwo dla danej osoby jest określone przez kursy, jakie jest ona skłonna zaakceptować w zakładach na wybory w 2024 roku¹².

Kursy zakładów analizowane przez Ramseya nie były arbitralne. Oczekiwał, że zostaną one dostosowane

^{*} Frank Ramsey argumentował, że jeśli określasz prawdopodobieństwo niezgodnie z „prawami”, to ktoś może zawrzeć przeciwko Tobie serię zakładów, przez które z pewnością stracisz pieniądze („arbitraż bukmacherski”). Ramsey to postać historyczna, którą najbardziej chciałbym poznać. Był geniuszem, a jego prace z rachunku prawdopodobieństwa, matematyki i ekonomii nadal są uważane za fundamentalne. Ponadto był promotorem doktoratu, tłumaczem i przyjacielem Ludwiga Wittgensteina. Był wielkim mężczyzną, ważył 108 kg, pracował tylko rano, a popołudniami grał w tenisa. Oprócz tego dużo pił, lubił huczne imprezy, miał żonę i kochanki oraz śmiał się „jak hipopotam”. Zmarł w 1930 roku w wieku zaledwie 26 lat, prawdopodobnie na chorobę Weila po kąpieli w rzece Cam (sam często tam pływałem). Była to ogromna strata dla brytyjskiej nauki. Gdyby nie umarł, byłby przełożonym Alana Turinga w King’s College w Cambridge. Bez wątpienia pomógłby złamać nazistowskie kody i doprowadzić do końca wojny jeszcze szybciej niż Turing i inni pracownicy z Bletchley Park. Nagrałem dla BBC Radio 4 program *Great Lives* o Ramseyu. Wystąpiła w nim Cheryl Misak, autorka znakomitej biografii *Frank Ramsey: A Sheer Excess of Powers*.

do rzeczywistości w sensie opisanym w rozdziale 2., tak aby można było oczekiwać wystąpienia 40% zdarzeń spośród tych wszystkich, którym przypisano prawdopodobieństwo 0,4. Pisał tak: „Nawyk o konkretnej postaci można ocenić (pozytywnie lub negatywnie) na podstawie tego, na ile generowany stopień przekonania odpowiada rzeczywistemu prawdopodobieństwu, z jakim nawyk ten prowadzi do prawdy”.

- **Maksymalizowanie oczekiwanego „wyniku”.**

Jeśli wyobrazimy sobie, że wynik wyborów prezydenckich jest pytaniem w konkursie prognostycznym, w którym prawdopodobieństwa mają być oceniane przy użyciu reguły takiej jak ta z rozdziału 2., wówczas należy podać prawdopodobieństwo 0,4, aby zmaksymalizować oczekiwany wynik. Aby zmaksymalizować oczekiwany wynik, należy podawać prawdopodobieństwo zgodne z odpowiednimi prawami.

Inne interpretacje można uznać za „subiektywne oparte na częstotliwości”, bo chociaż związane są z sądami osobistymi, ocenia się je na podstawie skuteczności w świecie rzeczywistym.

- **Oczekiwana proporcja podobnych sytuacji.** Fizyk Richard Feynman zdefiniował prawdopodobieństwo jako „naszą ocenę najbardziej prawdopodobnej proporcji przypadków, w których zdarzenie ma miejsce”¹³. Jest to ujęcie otwarcie subiektywne i odnosi się do sekwencji podobnych zdarzeń. Alan Turing zaproponował podobną koncepcję: „Prawdopodobieństwo zdarzenia na podstawie określonych dowodów jest proporcją przypadków, w których można oczekiwać, że to zdarzenie wystąpi w obecności tych dowodów”¹⁴. Podobnie jak interpretacja

prawdopodobieństwa oparta na częstotliwości definicje te wymagają, aby dany osąd umiejscowić w jakiejś bardziej ogólnej klasie. Zapewne można jednak przyjąć, że są to wszystkie sytuacje, w których prawdopodobieństwo wynosi 0,4 lub 40%. Tak więc Feynman i Turing zasadniczo oczekują, iż prawdopodobieństwo zostanie dostosowane do rzeczywistości na podstawie serii osądów.

- **Oczekiwana proporcja „możliwych przyszłości”.** Zamiast podawać prawdopodobieństwo w serii powtarzanych osądów, można wysilić wyobraźnię i pomyśleć, co mogłoby się wydarzyć, gdyby obecne okoliczności powtórzyły się wielokrotnie. Można więc na przykład stwierdzić, że Donald Trump zostałby wybrany w 40% „możliwych przyszłości” dziejących się na przestrzeni od grudnia 2023 do grudnia 2024 roku. Uważam, że jest to przydatna (choć, trzeba przyznać, metaforyczna) koncepcja. Można ją nawet powiązać z opisaną dalej „interpretacją z wieloma światami”.

Oczywiście niektóre z tych subiektywnych „częściowych przekonań” są lepiej uzasadnione niż inne. Jeśli starannie przyjrzę się monecie przed rzutem, a ona wyląduje na twardej powierzchni i losowo się od niej odbije, będę bardziej przekonany do oszacowania 50:50 niż w sytuacji, gdy jakaś podejrzana postać wyciągnie monetę i zacznie nią manipulować, zanim ją złapie. Tak więc co do niektórych osądów można mieć większą pewność, co omawiam w rozdziale 9.

Dla osób, które uczyły się prawdopodobieństwa na matematyce, może być zaskoczeniem, że wciąż nie ma zgody co do tego, czym

ono właściwie jest. Ani czy w ogóle istnieje, nad czym spróbuję się teraz zastanowić.

Kiedy w latach 70. XX wieku studiowałem matematykę na uniwersytecie, mój mentor, Adrian Smith*, tłumaczył *Theory of Probability*¹⁵ Bruna de Finettiego z języka włoskiego. De Finetti całkowicie niezależnie od Ramseya rozwinął w latach 30. XX wieku koncepcję subiektywnego prawdopodobieństwa[†], a swoją książkę rozpoczął od prowokacyjnego stwierdzenia:

Prawdopodobieństwo nie istnieje.

Może się to wydawać dość skrajnym poglądem i choć rozpoczynanie dyskusji na temat tego, co to znaczy, że coś „istnieje”, wykracza poza moje filozoficzne kompetencje, interpretuję to tak, że de Finetti stwierdził, iż prawdopodobieństwo nie jest obiektywną właściwością świata. Już w młodości w pełni przyswoilem sobie to nastawienie. Od 50 lat uważam, że prawdopodobieństwo to subiektywna ocena, nawet jeśli jest oparta na analizach symetrii fizycznej, analizach danych lub złożonych modelach. Za jedyny wyjątek można uznać subatomowy poziom kwantowy, gdzie można argumentować, że prawdopodobieństwo jest w pełni obiektywne i zdefiniowane (rozdział 6.).

Oznacza to, że poziom prawdopodobieństwa zasadniczo różni się od innych liczb, których na co dzień używamy, na przykład

* Obecnie (2024 rok) profesor Sir Adrian Smith. Profesor piastuje stanowisko prezesa Royal Society, co jest najwyższym dowodem uznania dla naukowca w Wielkiej Brytanii.

[†] Chociaż de Finetti w ciągu życia zmienił poglądy polityczne, w owym czasie był entuzjastycznym zwolennikiem faszyzmu Mussoliniego, w kontraście do Ramseya, który był zagorzałym socjalistą.

wartości oznaczających czas, odległość czy temperaturę. W rozdziale 2. wspomniałem, że włożono dużo wysiłku intelektualnego w umożliwienie dokonywania pomiarów za pomocą zegarów, linijek, termometrów i innych przyrządów, tak aby uzyskane liczby adekwatnie i z wymaganą dokładnością reprezentowały świat zewnętrzny. Ale gdzie szukać „prawdopodobieństwomierza”, który pozwoliłby zmierzyć prawdopodobieństwo? Nie ma niczego takiego, być może z wyjątkiem obciążonego wieloma ograniczeniami teoretycznego przypadku z powtarzanim nieskończoność identycznymi próbami. Dlatego prawdopodobieństwo można uznać za wartość *wirtualną*.

Jeśli jednak przyjąć, że prawdopodobieństwo jest konstruowane na podstawie osobistej oceny, to czy używane do tej pory wartości są akceptowalne, jeżeli są zgodne z określonymi wcześniej zasadami? Czy mogę powiedzieć, że istnieje 99,9% prawdopodobieństwa, że po skoku z dachu pofrunę? Cóż, mogę, ale gdybym spróbował to sprawdzić, szybko by się okazało, że słabo sobie radzę z oceną prawdopodobieństwa. I w tym właśnie miejscu pojawia się obiektywny świat zewnętrzny — przy *ocenie* prawdopodobieństwa w konfrontacji z rzeczywistością, na przykład za pomocą odpowiedniej reguły punktacji. Lub karetki.

Na szczęście, co omawiam w rozdziale 6., w praktyce nie musimy decydować, czy obiektywne „szanse” naprawdę istnieją w zwyczajnym świecie na poziomie ponadkwantowym. Możemy przyjąć pragmatyczne podejście i zachowywać się *tak, jakby* istniały. Jak na ironię najbardziej przekonujący argument za działaniem tak, jakby szanse istniały, został przedstawiony przez samego de Finettiego w jego pracy z 1931 roku na temat „wymienności”¹⁶. Sekwencja zdarzeń jest uważana za **wymienną**, jeśli przekonania na temat każdej sekwencji są niezależne od kolejności obserwacji. Na przykład przy ocenie prawdopodobieństwa, czy gejzer wybuchnie

w poszczególnych zbiorach dni, konkretne daty są nieistotne, a obserwacje można byłoby przeprowadzić w dowolnej kolejności. De Finetti błyskotliwie udowodnił, że jeśli przyjąć założenie wymienności, jest to matematycznie równoważne działaniu *tak, jakby* wydarzenia w każdym dniu były niezależne. W każdym dniu istnieje jakieś prawdopodobieństwo erupcji, a niepewność co do jego nieznanego poziomu jest wyrażona przez subiektywny rozkład epistemiczny. To nadzwyczajne — na podstawie czysto subiektywnego wyrazu przekonań de Finetti wykazuje, że powinniśmy postępować tak, jakby zdarzenia miały obiektywne prawdopodobieństwo wystąpienia.

Teoria prawdopodobieństwa leży u podstaw całej statystyki oraz dużej części działalności naukowej i gospodarczej. Zdumiewające jest to, że tak ważna dziedzina powstała na podstawie czegoś, co, jak można argumentować, w ogóle nie istnieje.

Podsumowanie

- Ludzie uprawiają hazard od tysiącleci, ale, co zaskakujące, koncepcja prawdopodobieństwa została poprawnie opracowana dopiero w XVII wieku.
- Zasady prawdopodobieństwa można intuicyjnie otrzymać na podstawie analizy tego, czego można się spodziewać w dużym zbiorze powtórzeń.
- Prawdopodobieństwo warunkowe, które zmienia się wraz z sytuacją, pojawia się w naturalny sposób przy losowaniu bez zwracania.
- Jeśli możemy założyć działanie procesu fizycznego, który prowadzi do równie prawdopodobnych wyników, wówczas ocena prawdopodobieństwa staje się kwestią liczenia „korzystnych” rezultatów związanych z analizowanym zdarzeniem.
- Wzory i przybliżenia służące do zliczania „korzystnych” wyników pozwalają ustalić prawdopodobieństwo sukcesu w grach losowych, loteriach itp.
- Prawdopodobieństwo było interpretowane na wiele sposobów, zarówno jako obiektywna właściwość świata, jak i jako subiektywna ocena.
- Nawet jeśli przyjąć, że prawdopodobieństwo różni się od innych standardowo stosowanych miar i jest konstruowane na podstawie subiektywnej oceny, to nadal możemy używać obiektywnego świata do oceny trafności podawanego prawdopodobieństwa.
- Obiektywne „szanse” mogą jednak istnieć na subatomowym poziomie kwantowym, a w codziennym życiu przydatne może być działanie tak, jakby prawdopodobieństwo istniało.

PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —

- 
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
 2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
 3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA
Helion 

SZTUKA ŻYCIA W CHAOSIE

Pandemia, wojny, konflikty, zmiany klimatu i populistyczne naciski podważające demokrację powodują, że nieprzewidywalność świata odczuwamy szczególnie dotkliwie. Inflacja, kryzys systemu opieki zdrowotnej, niepewność zatrudnienia i chwiejna gospodarka sprawiają, że jedynym pewnikiem jest to, że... wciąż zachodzą zmiany. To budzi w nas niepokój. I niepewność — o której, jak się okazuje, zaskakująco niewiele wiemy.

Ta mądra, wciągająca książka przeprowadzi Cię przez podstawy rachunku prawdopodobieństwa i pokaże, jak statystyka pomaga myśleć analitycznie o najróżniejszych sprawach — od zaleceń medycznych po prognozy klimatyczne. Dowiesz się, jak formować przekonania o przyszłości w świetle nowych doświadczeń. Przy okazji poznasz zaskakujące fakty: na przykład to, że około 40 procent wyników meczów piłkarskich zależy od szczęścia, a nie od umiejętności graczy, a także sposób, w jaki brytyjski Krajowy Rejestr Ryzyka ocenia najpoważniejsze zagrożenia. Ta książka sprawi, że niepewność stanie się bardziej zrozumiała i łatwiejsza do zaakceptowania — a może nawet odkryjesz radość z życia w niewiedzy.

onepress



Księgarnia internetowa:
onepress.pl



HELION S.A.
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
onepress@onepress.pl

książkiklasybusiness

ebook dostępny na:

ebookpoint

ISBN 978-83-289-2401-7



9 788328 924017

Cena: 69,00 zł