Rozdział 2

Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

2.1. Wstęp

Definicja 2.1. Niech F będzie funkcją trzech zmiennych. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu* nazywamy równanie postaci

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{2.1}$$

Rozwiązaniem (*całką równania* (2.1)) nazywamy każdą funkcję różniczkowalną $y = y\left(x\right)$ spełniającą to równanie dla x należącego do pewnego przedziału (a, b). Wykres funkcji $y = y\left(x\right)$ nazywamy *krzywą całkową* równania (2.1). *Rozwiązaniem ogólnym* (*całką ogólną*) równania (2.1) nazywamy rodzinę funkcji $y = y\left(x, C\right)$ zależną od parametru C należącego do pewnego przedziału. *Rozwiązaniem osobliwym* (*całką osobliwą*) równania (2.1) nazywamy takie rozwiązanie tego równania, którego nie da się otrzymać z rozwiązania ogólnego dla żadnej wartości parametru C. *Zagadnieniem początkowym* (lub *zagadnieniem Cauchy'ego*) dla równania (2.1) nazywamy problem wyznaczenia rozwiązania tego równania spełniającego tzw. *warunek początkowy* $y\left(x_0\right) = y_0$, gdzie $x_0 \in (a, b)$, czyli problem wyznaczenia takiej krzywej całkowej, której wykres przechodzi przez punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Definicja 2.2. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu rozwikłanym względem* y' nazywamy równanie postaci

$$y' = f\left(x, y\right), \tag{2.2}$$

gdzie f jest funkcją dwóch zmiennych.

Równanie (2.2) będziemy dalej zapisywali zwykle w postaci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right).$$

Przykład 2.3 (Równanie wzrostu lub spadku). Załóżmy, że zmiana wartości funkcji $y = y(x)$ (przyrost lub spadek) w stosunku do zmiany argumentu

x jest wprost proporcjonalna do jej wartości $y(x)$ w punkcie x, czyli $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ky$, gdzie $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Przechodząc do granicy przy $\Delta x \to 0$ otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = ky.$$

Dla $k > 0$ jest to *równanie wzrostu*, a dla $k < 0$ – *równanie spadku*. Całką ogólną równania jest funkcja $y = Ce^{kx}$. Dla różnych wartości stałej C otrzymujemy różne rozwiązania tego równania. Jeśli przyjmiemy na przykład warunek początkowy $y(0) = 2$, to z równości $y(0) = Ce^{k0} = C$ wynika, że $C = 2$, zatem funkcja $y = 2e^{kx}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $\frac{dy}{dx} = ky$ spełniającym warunek początkowy $y(0) = 2$.

Przykład 2.4 (**Ciągła zmiana kapitału przy stałej stopie procentowej**)**.** Załóżmy, że bank w ciągu roku stosuje oprocentowanie ciągłe ze stopą procentową r. Możemy przyjąć, że stopa procentowa pewnego krótkiego okresu Δt jest równa $r\Delta t$. Jeśli w chwili t kapitał jest równy $K(t)$, wówczas odsetki za okres $\langle t, t+\Delta t\rangle$ wynoszą $r\Delta t K(t)$ i kapitał w chwili $t+\Delta t$ jest równy $K(t)+K(t)r\Delta t$. Stąd mamy równanie $K(t + \Delta t) = K(t) + r\Delta t K(t)$, czyli

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = rK(t).$$

Przechodząc do granicy przy $\Delta t \to 0$ otrzymujemy równanie różniczkowe $K'(t) = rK(t)$.

Przykład 2.5 (**Ciągła zmiana kapitału przy zmiennej stopie procentowej**)**.** Załóżmy, że stopa procentowa jest zmienna w czasie i w chwili t wynosi $r(t)$, gdzie $r(t)$ jest funkcją ciągłą. Rozumując podobnie jak w poprzednim przykładzie, otrzymujemy, że funkcja $K(t)$ spełnia równanie różniczkowe $K'(t) = r(t)K(t)$.

Równanie różniczkowe (2.2) z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$ możemy przekształcić do równoważnej postaci całkowej

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Leftrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Rozwiązanie równania (2.2) z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$ jest zatem punktem stałym pewnego odwzorowania określonego na przestrzeni funkcji ciągłych.

Twierdzenie 2.6. *Jeśli funkcja $f : \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia warunek*

$$\bigvee_{L>0} \bigwedge_{x\in\langle a,b\rangle} \bigwedge_{y_1,y_2\in\langle c,d\rangle} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

(warunek Lipschitza), to dla dowolnego punktu $x_0 \in (a, b)$:

a) istnieje taki przedział $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle \subset (a, b)$, że odwzorowanie

$$T : C (\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle , \mathbb{R}) \to C (\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle , \mathbb{R})$$

określone wzorem

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

jest odwzorowaniem zwężającym;

b) równanie różniczkowe $y' = f(x, y)$ z warunkiem początkowym $y(x_0) = y_0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie określone w $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\rangle$.

Wniosek 2.1. *Jeśli funkcja f i jej pochodna cząstkowa f'_y są ciągłe w pewnym otoczeniu (x_0, y_0), to istnieje takie otoczenie $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ punktu x_0, w którym określona jest dokładnie jedna funkcja różniczkowalna $y = y\,(x)$ spełniająca warunki $\dfrac{dy}{dx} = f\,(x, y)$ i $y\,(x_0) = y_0$.*

Z wniosku (2.1) wynika, że jeśli funkcje f i f'_y są ciągłe, to przez punkt (x_0, y_0) przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa.

Przykład 2.7. Wyznaczymy metodą kolejnych przybliżeń rozwiązanie równania różniczkowego $\dfrac{dy}{dx} = y$ spełniającego warunek początkowy $y(0) = 1$.

Rozwiązanie. Rozpatrujemy równanie różniczkowe postaci $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, gdzie $f(x, y) = y$, z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Odwzorowanie zwężające jest określone wzorem

$$T(y)(x) = 1 + \int_{0}^{x} y(t)dt,$$

a w konsekwencji ciąg (y_n) zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego spełnia warunki:

$$\begin{aligned} &y_0(x) = 1, \\ &y_n(x) = 1 + \int_0^x y_{n-1}(t)dt \text{ dla } n > 1. \end{aligned}$$

Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1,\\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x,\\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2,\\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2\right) dt = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3,\\
&\vdots\\
y_n(x) &= 1 + x + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $y_n(x) \to e^x$ jednostajnie w $\mathbb{R}$, czyli rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego jest funkcja $y(x) = e^x$.

Przykład 2.8. Wyznaczymy metodą kolejnych przybliżeń rozwiązanie równania różniczkowego $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$ z warunkiem początkowym $y(0) = 1$.

Rozwiązanie. W rozważanym przykładzie mamy $f(x, y) = 2xy$, stąd:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1,\\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x 2tdt = 1 + x^2,\\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x 2t(1+t^2)dt = 1 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4.
\end{aligned}$$

Ogólnie $y_n(x) = 1 + x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{2n}$ oraz $y_n(x) \to e^{x^2}$ jednostajnie w $\mathbb{R}$.

Zadania

2.1. Sprawdzić, czy funkcja $y = -\dfrac{2}{x^2-4}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$.

2.2. Sprawdzić, czy funkcja $y = 2e^{-\cos x}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $\dfrac{dy}{dx} = y \sin x$.

2.3. Sprawdzić, czy funkcja $y = 5e^{x^2+1} + 2x$ spełnia równanie różniczkowe $\dfrac{dy}{dx} = 2xy - 4x^2 + 2$.

2.4. Sprawdzić, czy funkcja $y = -2e^{\frac{1}{3}x^2+1} - 4$ spełnia równanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = x^2y + 4x^2$.

2.5. Sprawdzić, czy funkcja $y = 2e^{x^2+1} - 4x$ spełnia równanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = 2xy + 8x^2 - 4$.

2.6. Sprawdzić, czy funkcja $y = C\,(x-2) - 1$ jest rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego:
a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-2}$, b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

2.7. Wyznaczyć rozwiązanie równania wzrostu $\frac{dy}{dx} = 3y$ spełniające warunek początkowy:
a) $y\,(-1) = 3$,
b) $y\,(1) = 4$,
c) $y\,(2) = 1$.

2.8. Wyznaczyć rozwiązanie równania spadku $\frac{dy}{dx} = -4y$ spełniające warunek początkowy:
a) $y\,(-1) = 1$,
b) $y\,(1) = 2$,
c) $y\,(2) = 3$.

2.9. Wyznaczyć metodą kolejnych przybliżeń rozwiązanie równania różniczkowego $\frac{dy}{dx} = x + y$ spełniającego warunek początkowy $y(0) = 0$.

2.2. Równania o zmiennych rozdzielonych

Definicja 2.9. *Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych* nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = q\,(x)\,p\,(y)\,. \tag{2.3}$$

Twierdzenie 2.10. *Jeśli funkcja $q\,(x)$ jest ciągła w pewnym otoczeniu x_0, funkcja $p\,(y)$ jest ciągła w pewnym otoczeniu y_0 i $p\,(y_0) \neq 0$, to istnieje takie otoczenie punktu (x_0, y_0), że równanie (2.3) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = y\,(x)$ spełniające warunek początkowy $y\,(x_0) = y_0$.*

Równanie o zmiennych rozdzielonych rozwiązujemy następująco. Sprawdzamy najpierw, czy warunek $p(y) = 0$ wyznacza rozwiązanie równania (2.3). Następnie