Aleksandra Świetlicka
Andrzej Rybarczyk
Agata Jurkowlaniec

Rachunek operatorowy

Metody rozwiązywania zadań

PWN

Redaktor inicjujący: *Kinga Tomaszewska*

Redaktor prowadzący: *Irena Puchalska*

Produkcja *Mariola Grzywacka*

ISBN 978-83-01-16976-3

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 22 69 54 321; faks 22 69 54 288
e-mail: pwn@pwn.com.pl; www.pwn.pl

Spis treści

Przedmowa

Oddajemy w Państwa ręce zbiór zadań, który jest podsumowaniem doświadczeń dydaktycznych zebranych na przestrzeni wielu lat, podczas zajęć ze studentami prowadzonych na kierunku Automatyka i Robotyka oraz kierunkach pokrewnych, na których rachunek operatorowy jest istotny. Zadania zebrane w tym zbiorze dotyczą zatem konkretnych problemów obliczeniowych pojawiających się na takich przedmiotach, jak: teoria obwodów, podstawy automatyki czy też cyfrowe przetwarzanie sygnałów.

Książka, w naturalny sposób, składa się z trzech zasadniczych części.

W części pierwszej podano podstawowe wiadomości o transformacie Laplace'a i pokazano jej zastosowania do rozwiązywania zagadnień równań różniczkowych zwyczajnych i równań cząstkowych, układów takich równań oraz licznych zastosowań twierdzeń i własności tej transformaty w analizie i syntezie układów fizycznych (zwłaszcza układów analogowych, liniowych). Z uwagi na zakres typowych zastosowań transformacji Laplace'a w technice ograniczono się do transformacji jednostronnej.

W części drugiej omówiono podstawy transformacji $\mathcal{Z}$, obliczanie transformat oraz wykorzystanie twierdzeń i własności transformaty, zwracając jednak szczególną uwagę na zastosowania w układach próbkowanych (z czasem dyskretnym), zwłaszcza w układach cyfrowych. Dlatego stosunkowo dużo miejsca poświęcono równaniom rekurencyjnym, transmitancji układu cyfrowego, wyznaczaniu odpowiedzi układów o skończonej (SOI) i nieskończonej (NOI) odpowiedzi impulsowej. Przedstawiono także przykłady badania związków między transformatą Laplace'a a transformatą $\mathcal{Z}$ oraz konsekwencje „układowe" wynikające z tych zależności.

Trzecią część poświęcono przekształceniu Fouriera, które omówiono w bardzo ograniczonym zakresie, niezbędnym dla studentów wspomnianego wcześniej kierunku studiów. Bardziej szczegółowe informacje i przykłady można znaleźć w bardzo bogatej w tym zakresie literaturze, z której część przytoczono na końcu niniejszej książki.

W celu ułatwienia korzystania z podręcznika na końcu umieszczono Dodatki zawierające m.in. podstawowe wzory, twierdzenia i zależności, tablice transformat.

Zadania zostały tak pomyślane, aby na podstawie przykładowych rozwiązań części z nich Czytelnik mógł przystąpić do samodzielnego rozwiązania pozostałych. Dlatego podano wyniki wszystkich zadań, by ułatwić weryfikację opanowania prezentowanych w zbiorze treści.

Autorzy mają nadzieję, że w wyniku wielokrotnej weryfikacji wszelkie usterki udało im się usunąć, jednak w przypadku zauważenia jakichkolwiek, będą wdzięczni za ich wskazanie.

Pragniemy ponadto wyrazić wdzięczność wszystkim tym, którzy radą lub pomocą wnieśli wkład w ostateczną formę tej pracy.

W imieniu autorów
Andrzej Rybarczyk

Wykaz symboli

$\mathbb{1}(n)$	dyskretna funkcja skokowa
$\mathbb{1}(t)$	funkcja skokowa Heaviside'a
C	pojemność
$\delta(n)$	delta Kroneckera
$\delta(t)$	delta Diraca
$e(t)$	źródło napięciowe w dziedzinie czasu
$\mathcal{F}$	operator transformaty Fouriera
G	konduktancja
$H(s)$	transmitancja operatorowa w dziedzinie transformaty Laplace'a
$H(z)$	transmitancja operatorowa w dziedzinie transformaty $\mathcal{Z}$
$i(t)$	prąd w dziedzinie czasu
$I(s)$	prąd w dziedzinie operatorowej
$\mathcal{L}$	operator transformaty Laplace'a
L	indukcyjność
P	przełącznik
R	rezystancja
s	argument funkcji z dziedziny transformaty Laplace'a
$\mathrm{sgn}(t)$	funkcja signum określająca znak liczby rzeczywistej
$\mathrm{sinc}(t)$	funkcja $\dfrac{\sin(t)}{t}$
$u(t)$	napięcie w dziedzinie czasu
$U(s)$	napięcie w dziedzinie operatorowej
ω	argument funkcji z dziedziny transformaty Fouriera
$y_\delta(n)$	odpowiedź impulsowa układu dyskretnego
$y_\delta(t)$	odpowiedź impulsowa układu ciągłego

$y_{\mathbb{1}}(n)$	odpowiedź skokowa układu dyskretnego
$y_{\mathbb{1}}(t)$	odpowiedź skokowa układu ciągłego
$\mathcal{Z}$	operator transformaty $\mathcal{Z}$
$Z(s)$	impedancja zastępcza w dziedzinie operatorowej
z	argument funkcji z dziedziny transformaty $\mathcal{Z}$

Wstęp

Ideą przekształceń całkowych jest przenoszenie równań różniczkowo-całkowych z obszaru zmiennej rzeczywistej w obszar zmiennej zespolonej $s = \sigma + j\omega$. Przekształcenie, z definicji, jest to przyporządkowanie funkcjom wziętym z pewnej klasy funkcji (nazywanych oryginałami) określonych innych funkcji, które nazywamy ich transformatami. Dzięki wykorzystaniu przekształcenia całkowego można uzyskać prostszą postać rozwiązywanych równań (postać algebraiczną) i mogą być one rozwiązywane prostszymi metodami, właściwymi dla nich.

Przenoszenie równań różniczkowo-całkowych w dziedzinę zmiennej zespolonej pozwala uniknąć wyznaczania stałych całkowych. Warunki początkowe są uwzględniane w równaniach w postaci odpowiednich źródeł prądu lub napięcia na etapie układania równań operatorowych.

Największe znaczenie przy rozwiązywaniu równań różniczkowo-całkowych metodą operatorową ma transformata Laplace'a. Metoda ta korzystna jest przy wyznaczaniu rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych liniowych, zwłaszcza równań o stałych współczynnikach. Stosując metodę przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania równania różniczkowego, w zasadzie wyznaczamy całkę szczególną, spełniającą zadane warunki początkowe.

Metoda transformaty Laplace'a składa się z trzech etapów, mianowicie:

1° znalezienie transformaty obu stron równania, z uwzględnieniem warunków początkowych;
2° rozwiązanie otrzymanego równania algebraicznego;
3° wyznaczenie transformaty odwrotnej.

Otrzymane transformaty odwrotne, jako funkcje należące do klasy oryginałów, nie spełniają na ogół wyjściowego równania różniczkowego. Jednak funkcje określone tak jak znalezione transformaty odwrotne, lecz rozpatrywane tylko dla $t \geqslant 0$, są rozwiązaniami równania różniczkowego. Innymi słowy, rozwiązując równanie różniczkowe metodą przekształcenia Laplace'a, znajdujemy rozwiązanie tego równania określone tylko dla $t \geqslant 0$. Może się zdarzyć, oczywiście w szczególnych przypadkach, że również dla $t < 0$ rozwiązanie równania różniczkowego będzie miało taką samą postać, tak jednak nie musi być dla każdego równania.

Dzięki łatwemu przenoszeniu funkcji z dziedziny zmiennej rzeczywistej w dziedzinę zmiennej zespolonej i odwrotnie transformata Laplace'a wykorzystywana jest m.in. do analizy obwodów elektrycznych. Każdy z elementów obwodu ma swój odpowiednik w dziedzinie zmiennej zespolonej s. Metoda transformaty Laplace'a jest szczególnie wygodna przy analizie stanów nieustalonych.

Wśród innych zastosowań transformaty Laplace'a można znaleźć opis liniowych układów sterowania. Układy te są opisane za pomocą układów równań, a w szczególności równań różniczkowych, stąd wyraźna zaleta przekształcania Laplace'a w opisie tej klasy systemów.

Transformata Laplace'a jest korzystna przy badaniu liniowych, stacjonarnych układów ciągłych w czasie. Dzięki niej możliwe jest przekształcenie równań różniczkowych w równania algebraiczne, co upraszcza analizę i syntezę układów. Transformata $\mathcal{Z}$ stanowi dyskretny odpowiednik transformaty Laplace'a — jest to przekształcenie, które z pewnego ciągu próbek $f[n]$ pozwala utworzyć funkcję zmiennej zespolonej z. Stąd możliwość zamiany równania różnicowego układu na równania algebraiczne zmiennej zespolonej z.

Można więc powiedzieć, że transformata $\mathcal{Z}$ jest szczególnym przypadkiem transformaty Laplace'a, gdzie zamiast operatora s wstawiono nową zmienną, która jest użyteczna w układach z czasem dyskretnym, i gdzie transformata Laplace'a dawałaby rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego. Natomiast transformata $\mathcal{Z}$ umożliwia przedstawienie tego szeregu w postaci algebraicznej (wielomianu zmiennej z) i dlatego wygodniejszej do celów analizy w układach z czasem dyskretnym. Istnieje kilka możliwości przekształcenia funkcji zmiennej s na funkcję zmiennej z.

Transformata Fouriera ma szczególne znaczenie w przypadku analizy sygnałów okresowych. Oczywiście, podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a, również transformatę Fouriera można wykorzystać do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych, jednak w tym przypadku wykorzystuje się dużo łatwiejsze przekształcenie Laplace'a. Przekształcenie Fouriera pozwala na przeniesienie badanego sygnału z dziedziny zmiennej rzeczywistej w dziedzinę zmiennej zespolonej — pozwala mianowicie przekształcić funkcję z postaci czasowej w postać częstotliwościową (lub pulsacyjną).

W przypadku transformaty Fouriera mamy do czynienia z analogowym (w przypadku transformaty ciągłej) lub cyfrowym (w przypadku transformaty dyskretnej) przetwarzaniem sygnałów. Obróbka sygnałów ma na celu poprawienie jakości (czy też pewnych własności) badanego sygnału. Przekształcenie danej funkcji, za pomocą transformaty Fouriera, z dziedziny czasu w dziedzinę częstotliwości pozwala odczytać amplitudę i fazę poszczególnych składowych harmonicznych sygnału. Do najbardziej popularnych zastosowań przekształcenia Fouriera należą przetwarzanie dźwięku (np. kompresja MP3), cyfrowe przetwarzanie obrazu (np. kompresja JPEG), filtracja sygnału (np. odszumianie sygnału), filtracja obrazu.

Istnieje więcej przekształceń całkowych niż wymienione powyżej transformaty Laplace'a oraz Fouriera. W poniższej tabeli zostały zestawione wybrane transformaty.

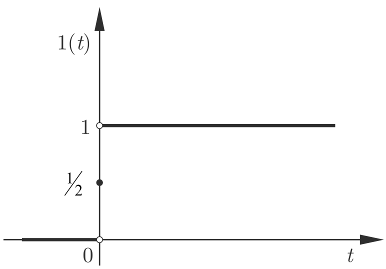
Nazwa przekształcenia	Postać jądra	Postać przekształcenia	Symbol
Laplace'a (jednostronne)	e^{-st}	$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$	$\mathcal{L}$
Laplace'a–Carsona	se^{-st}	$\int_0^\infty se^{-st} f(t)\, dt$	$\mathcal{C}$
sinusowe — Fouriera	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(st)$	$\int_0^\infty \sin(st) f(t)\, dt$	$\mathcal{F}_s$
cosinusowe — Fouriera	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(st)$	$\int_0^\infty \cos(st) f(t)\, dt$	$\mathcal{F}_c$
Fouriera	e^{ist}	$\int_{-\infty}^\infty e^{ist} f(st)\, dt$	$\mathcal{F}$
sprzężone Fouriera	e^{-ist}	$\int_{-\infty}^\infty e^{-ist} f(st)\, dt$	$\mathcal{F}^*$
Mellina	t^{s-1}	$\int_0^\infty t^{s-1} f(t)\, dt$	$\mathfrak{m}$
Stjeltiesa	$\frac{1}{t+s}$	$\int_0^\infty \frac{1}{t+s} f(t)\, dt$	δ
Hankela	$tI_\nu(st)$	$\int_0^\infty tI_\nu(st) f(t)\, dt$	H_ν

1

Transformata Laplace'a

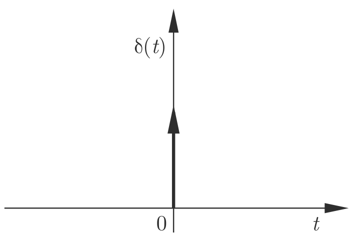
1.1. Podstawowe pojęcia

Do podstawowych pseudofunkcji należą: funkcja skokowa Heaviside'a oraz funkcja impulsowa (delta Diraca). Poniżej przedstawiono postaci tych funkcji wraz z wykresami.



funkcja skokowa

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0 \end{cases} \tag{1.1}$$



delta Diraca

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t \neq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Dodatkowo poniżej zestawiono wzory Eulera dla funkcji trygonometrycznych i hiperbolicznych:

$$\cos(at) = \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2} \qquad \sin(at) = \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j} \tag{1.3}$$

$$\cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \qquad \sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \tag{1.4}$$

Zadania

1. Podane funkcje zapisz, korzystając z funkcji skokowej $\mathbb{1}(t)$:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \\ 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 3 & \text{dla} \quad t > 2 \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} t - 2a & \text{dla} \quad 2a \leqslant t < a + b \\ 2b - t & \text{dla} \quad a + b \leqslant t \leqslant 2b \\ 0 & \text{dla} \quad t < 2a, \ t > 2b \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant a \\ 2a - t & \text{dla} \quad a < t \leqslant 2a \\ 0 & \text{dla} \quad t < 0, \ t > 2a \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < a \\ t - a & \text{dla} \quad a \leqslant t \leqslant b \\ b - a & \text{dla} \quad t > b \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 1, \ t > 3 \\ -1 & \text{dla} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 1 & \text{dla} \quad 2 < t \leqslant 3 \end{cases}$

(f) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 1, \ t > 4 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{5}{3} & \text{dla} \quad 1 < t < 4 \end{cases}$

(g) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 1, \ t > 3 \\ -t + 1 & \text{dla} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ -t + 3 & \text{dla} \quad 2 < t \leqslant 3 \end{cases}$

(h) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 1, \ t > 5 \\ -2t + 4 & \text{dla} \quad 1 \leqslant t \leqslant 3 \\ \frac{3}{2}t - \frac{13}{2} & \text{dla} \quad 3 < t \leqslant 5 \end{cases}$

(i) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 1, \ t > 9 \\ t - 1 & \text{dla} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{dla} \quad 2 \leqslant t < 4 \\ -t + 5 & \text{dla} \quad 4 \leqslant t < 6 \\ -1 & \text{dla} \quad 6 \leqslant t < 8 \\ t - 9 & \text{dla} \quad 8 \leqslant t < 9 \end{cases}$

(j) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \ t > 6, \ 2 < t < 4 \\ t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ -t + 2 & \text{dla} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ t - 4 & \text{dla} \quad 4 \leqslant t < 5 \\ -t + 6 & \text{dla} \quad 5 \leqslant t \leqslant 6 \end{cases}$

Odpowiedzi

1. (a) $f(t) = \mathbb{1}(t) + 2\mathbb{1}(t - 2)$

   (b) $f(t) = (t - 2a)\,\mathbb{1}(t - 2a) - 2(t - a - b)\,\mathbb{1}(t - a - b) + (t - 2b)\,\mathbb{1}(t - 2b)$

(c) $f(t) = t\mathbb{1}(t) - 2\,(t-a)\,\mathbb{1}\,(t-a) + (t-2a)\,\mathbb{1}\,(t-2a)$

(d) $f(t) = (t-a)\,\mathbb{1}\,(t-a) - (t-b)\,\mathbb{1}\,(t-b)$

(e) $f(t) = -\mathbb{1}\,(t-1) + \mathbb{1}\,(t-2) - \mathbb{1}\,(t-3)$

(f) $f(t) = \left(-\frac{2}{3}t + \frac{5}{3}\right)\mathbb{1}\,(t-1) + \left(\frac{2}{3}t - \frac{5}{3}\right)\mathbb{1}\,(t-4)$

(g) $f(t) = -\,(t-1)\,\mathbb{1}\,(t-1) + 2\mathbb{1}\,(t-2) + (t-3)\,\mathbb{1}\,(t-3)$

(h) $f(t) = -2\,(t-2)\,\mathbb{1}\,(t-1) + \left(\frac{7}{2}t - \frac{21}{2}\right)\mathbb{1}\,(t-3) - \left(\frac{3}{2}t - \frac{13}{2}\right)\mathbb{1}\,(t-5)$

(i) $f(t) = (t-1)\,\mathbb{1}\,(t-1) - (t-2)\,\mathbb{1}\,(t-2) - (t-4)\,\mathbb{1}\,(t-4) +$ $(t-6)\,\mathbb{1}\,(t-6) + (t-8)\,\mathbb{1}\,(t-8) - (t-9)\,\mathbb{1}\,(t-9)$

(j) $f(t) = t\mathbb{1}(t) - 2\,(t-1)\,\mathbb{1}\,(t-1) + 2\,(t-3)\,\mathbb{1}\,(t-4) - 2\,(t-5)\,\mathbb{1}\,(t-5) +$ $(t-6)\,\mathbb{1}\,(t-6)$

1.2. Definicja transformaty Laplace'a

Dowolnej funkcji czasu $f(t)$, zwanej dalej „oryginałem”, spełniającej warunki:

- funkcja $f(t) = 0$ dla $t < 0$ i jest określona dla $t \geqslant 0$;
- $|f(t)|$ rośnie nie szybciej niż funkcja wykładnicza, czyli $|f(t)| \leqslant Ae^{\sigma t}$, gdzie $A > 0$ i $\sigma \geqslant 0$;
- $f(t)$ spełnia warunki Dirichleta, tzn. ma skończoną liczbę punktów nieciągłości; dla każdego z tych punktów istnieje granica lewo- i prawostronna funkcji — wartość funkcji w tym punkcie przyjmuje się jako wartość średnią tych granic,

odpowiada w dziedzinie częstotliwości zespolonych $s = \sigma + j\omega$ funkcja $F(s)$ zwana dalej obrazem lub transformatą funkcji $f(t)$. Przejście z $f(t)$ do $F(s)$ definiujemy następująco:

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.5}$$

i oznaczamy $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ [10].

Przykład 1.1. *Korzystając z definicji, wyznacz transformatę Laplace'a funkcji* $f(t) = e^{at}$*, gdzie* a *jest liczbą dowolną,* $a \neq 0$.

Rozwiązanie

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty e^{(a-s)t}dt =$$

$$= \frac{1}{a-s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t} - e^0\right] = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

Przykład 1.2. *Korzystając z definicji, wyznacz transformatę Laplace'a funkcji* $f(t) = \sin{(at)}$ *, gdzie* a *jest liczbą dowolną,* $a \neq 0$.

Rozwiązanie

$$F(s)=\int\limits_0^\infty \sin(at)\,e^{-st}dt=\int\limits_0^\infty \frac{e^{jat}-e^{-jat}}{2j}e^{-st}dt=$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\int\limits_0^\infty e^{(ja-s)t}dt-\int\limits_0^\infty e^{-(ja+s)t}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{ja-s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{(ja-s)t}-e^0\right)-\frac{1}{-ja-s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-(ja+s)t}-e^0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2j}\left(-\frac{1}{ja-s}-\frac{1}{ja+s}\right)=\frac{1}{2j}\frac{2ja}{s^2+a^2}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

Poniżej, w postaci twierdzeń, zestawiono własności transformaty Laplace'a [3, 7, 14].

1. Twierdzenie o addytywności
   Jeżeli $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ i $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)$, to
$$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}=F(s)+G(s) \tag{1.6}$$
2. Twierdzenie o jednorodności przekształcenia Laplace'a
   Jeżeli $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ i a jest dowolną liczbą stałą,
$$\mathcal{L}\{af(t)\}=aF(s) \tag{1.7}$$
3. Twierdzenie o liniowości przekształcenia Laplace'a
   Jeżeli $\alpha,\beta=\text{const}$ oraz $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ i $\mathcal{L}\{G(t)\}=G(s)$, to
$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)+\beta g(t)\}=\alpha F(s)+\beta G(s) \tag{1.8}$$
4. Twierdzenie o podobieństwie
   Jeżeli $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, to dla $a>0$
$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{1.9}$$
5. Twierdzenie o tłumieniu
   Jeżeli $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, a jest liczbą stałą, to
$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}f(t)\right\}=F(s+a) \tag{1.10}$$
6. Twierdzenie o przesunięciu
   Jeżeli $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $a>0$, to
$$\mathcal{L}\{f(t-a)\}=e^{-as}F(s) \tag{1.11}$$

Definicję transformaty Laplace'a funkcji okresowej przedstawiono poniżej w postaci twierdzenia.