

O'REILLY®

# Praktyczna algebra liniowa dla analityków danych

Od podstawowych koncepcji  
do użytecznych aplikacji  
w Pythonie



Helion 

Mike X Cohen

Tytuł oryginału: Practical Linear Algebra for Data Science:  
From Core Concepts to Applications Using Python

Tłumaczenie: Filip Kamiński

ISBN: 978-83-289-0261-9

© 2024 Helion S.A.

Authorized Polish translation of the English edition of *Practical Linear Algebra for Data Science*  
ISBN 9781098120610 © 2022 Syncxpress BV.

This translation is published and sold by permission of O'Reilly Media, Inc.,  
which owns or controls all rights to publish and sell the same.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any  
form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording  
or by any information storage retrieval system, without permission from the Publisher.

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości  
lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione.  
Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie  
książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie  
praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi  
bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz wydawca dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje  
były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich  
wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych  
lub autorskich. Autor oraz wydawca nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności  
za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Helion S.A.  
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice  
tel. 32 230 98 63  
e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)  
WWW: <https://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!  
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres  
<https://helion.pl/user/opinie/pralli>  
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Printed in Poland.

- Kup książkę
- Poleć książkę
- Oceń książkę

- Księgarnia internetowa
- Lubię to! » Nasza społeczność

---

# Spis treści

<b>Wstęp .....</b>	<b>11</b>
<b>1. Wprowadzenie .....</b>	<b>13</b>
Co to jest algebra liniowa i dlaczego warto ją poznać?	13
O książce	14
Wymagania wstępne	14
Matematyka	14
Postawa	15
Programowanie	15
Dowody matematyczne kontra kod	16
Kod pokazany w książce i do pobrania z sieci	17
Ćwiczenia z programowania	17
Jak korzystać z tej książki (dla nauczycieli i osób uczących się samodzielnie)?	18
<b>2. Wektory — część I .....</b>	<b>19</b>
Tworzenie i wizualizacja wektorów w NumPy	19
Geometryczna interpretacja wektorów	21
Operacje na wektorach	22
Dodawanie dwóch wektorów	22
Geometryczne dodawanie i odejmowanie wektorów	24
Mnożenie wektorów przez skalar	24
Dodawanie wektorów i skalarów	25
Transpozycja	26
Broadcasting w Pythonie	27
Moduł wektora i wektory jednostkowe	28
Iloczyn skalarny wektorów	29
Iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania	31
Geometryczna interpretacja iloczynu skalarnego	31

Inne sposoby mnożenia wektorów	32
Iloczyn Hadamarda	33
Iloczyn zewnętrzny	33
Iloczyn wektorowy i mieszany	34
Ortogonalny rozkład wektora	34
Podsumowanie	38
Ćwiczenia z programowania	38
<b>3. Wektory — część II .....</b>	<b>41</b>
Zbiory wektorów	41
Ważona kombinacja liniowa	42
Niezależność liniowa	43
Matematyka związana z niezależnością liniową	44
Niezależność a wektor zerowy	45
Podprzestrzeń i rozpinanie	46
Baza	48
Definicja bazy	51
Podsumowanie	52
Ćwiczenia z programowania	52
<b>4. Zastosowania wektorów .....</b>	<b>54</b>
Korelacja i podobieństwo cosinusowe	54
Filtrowanie szeregów czasowych i wykrywanie cech	56
Klasteryzacja za pomocą algorytmu k-średnich	57
Ćwiczenia z programowania	60
Ćwiczenia z korelacji	60
Ćwiczenia z filtrowania i wykrywania cech	62
Ćwiczenia z algorytmu k-średnich	63
<b>5. Macierze — część I .....</b>	<b>64</b>
Tworzenie i wizualizowanie macierzy w NumPy	64
Wizualizowanie, indeksowanie i slicing	64
Specjalne macierze	66
Matematyka macierzy: dodawanie, mnożenie przez skalar i iloczyn Hadamarda	68
Dodawanie i odejmowanie	68
„Przesuwanie” macierzy	68
Mnożenie przez skalar i iloczyn Hadamarda	69
Standardowe mnożenie macierzy	70
Kiedy można pomnożyć przez siebie dwie macierze?	70
Mnożenie macierzy	71
Mnożenie macierz – wektor	72

Operacje na macierzach: transpozycja	74
Iloczyn skalarny i iloczyn zewnętrzny — notacja	75
Operacje na macierzach: LIVE EVIL (kolejność operacji)	75
Macierze symetryczne	75
Tworzenie macierzy symetrycznych z macierzy niesymetrycznych	76
Podsumowanie	77
Ćwiczenia z programowania	78
<b>6. Macierze — część II .....</b>	<b>82</b>
Normy macierzowe	82
Ślad macierzy i norma Frobeniusa	84
Przestrzenie macierzowe (kolumnowa, wierszowa, jądro)	84
Przestrzeń kolumnowa	84
Przestrzeń wierszowa	88
Jądro	88
Rząd	91
Rzędy specjalnych macierzy	93
Rząd a dodawanie i mnożenie macierzy	95
Rząd a przesuwanie macierzy	95
Teoria a praktyka	96
Zastosowania rzędu	97
Czy wektor znajduje się w przestrzeni kolumnowej macierzy?	97
Niezależność liniowa zbioru wektorów	98
Wyznacznik	99
Obliczanie wyznacznika	100
Wyznacznik a zależność liniowa	101
Wielomian charakterystyczny	101
Podsumowanie	103
Ćwiczenia z programowania	104
<b>7. Zastosowania macierzy .....</b>	<b>109</b>
Wielowymiarowe macierze kowariancji danych	109
Transformacje geometryczne za pomocą mnożenia macierz – wektor	112
Wykrywanie cech na obrazie	115
Podsumowanie	118
Ćwiczenia z programowania	119
Ćwiczenia z macierzy kowariancji i korelacji	119
Ćwiczenia z transformacji geometrycznych	120
Ćwiczenia z wykrywania cech w obrazach	122

<b>8. Odwracanie macierzy .....</b>	<b>124</b>
Odwrotność macierzy	124
Rodzaje odwrotności i warunki odwracalności	125
Obliczanie odwrotności	125
Odwrotność macierzy $2 \times 2$	126
Odwrotność macierzy diagonalnej	128
Odwracanie dowolnej macierzy kwadratowej o pełnym rzędzie	128
Odwrotności jednostronne	129
Unikalność odwrotności	132
Pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a	132
Stabilność numeryczna obliczania odwrotności	133
Geometryczna interpretacja odwrotności	135
Podsumowanie	136
Ćwiczenia z programowania	137
<b>9. Macierze ortogonalne i rozkład QR .....</b>	<b>140</b>
Macierze ortogonalne	140
Ortogonalizacja Grama-Schmidta	142
Rozkład QR	142
Wymiary Q i R	144
Rozkład QR i obliczanie odwrotności	145
Podsumowanie	146
Ćwiczenia z programowania	146
<b>10. Przekształcenie do macierzy schodkowej i rozkład LU .....</b>	<b>151</b>
Układy równań	151
Przekształcanie równań w macierze	152
Praca z równaniami macierzowymi	153
Sprawdzanie macierzy do postaci schodkowej	154
Eliminacja Gaussa	156
Eliminacja Gaussa-Jordana	157
Odwracanie macierzy za pomocą eliminacji Gaussa-Jordana	158
Rozkład LU	160
Zamiana wierszy za pomocą macierzy permutacji	160
Podsumowanie	162
Ćwiczenia z programowania	162
<b>11. Ogólne modele liniowe i metoda najmniejszych kwadratów .....</b>	<b>165</b>
Ogólne modele liniowe	166
Terminologia	166
Tworzenie ogólnego modelu liniowego	166

Dopasowywanie ogólnego modelu liniowego	167
Czy to rozwiązanie jest dokładne?	168
Metoda najmniejszych kwadratów — perspektywa geometryczna	169
Dlaczego metoda najmniejszych kwadratów działa?	170
Prosty przykład ogólnego modelu liniowego	172
Rozwiązywanie problemu najmniejszych kwadratów za pomocą rozkładu QR	176
Podsumowanie	177
Ćwiczenia z programowania	177
<b>12. Zastosowania metody najmniejszych kwadratów .....</b>	<b>181</b>
Przewidywanie liczby wypożyczonych rowerów na podstawie pogody	181
Tabela regresji z pakietu statsmodels	186
Współliniowość	187
Regularyzacja	187
Regresja wielomianowa	188
Znajdowanie parametrów modelu za pomocą przeszukiwania siatki	191
Podsumowanie	193
Ćwiczenia z programowania	194
Zbiór danych z informacjami o wypożyczaniu rowerów	194
Ćwiczenie ze współliniowości	195
Ćwiczenie z regularyzacji	196
Ćwiczenie z regresji wielomianowej	197
Ćwiczenia z przeszukiwania siatki	198
<b>13. Rozkład według wartości własnych .....</b>	<b>199</b>
Interpretacje wartości i wektorów własnych	200
Interpretacja geometryczna	200
Statystyka (analiza głównych składowych)	201
Redukcja szumów	201
Redukcja wymiarowości (kompresja danych)	202
Znajdowanie wartości własnych	203
Znajdowanie wektorów własnych	205
Znak i skala nieokreśloności wektorów własnych	206
Diagonalizacja macierzy kwadratowej	207
Wyjątkowość macierzy symetrycznych	208
Ortogonalne wektory własne	208
Rzeczywiste wartości własne	210
Rozkład według wartości własnych macierzy osobliwych	211
Forma kwadratowa, określoność i wartości własne	212
Forma kwadratowa macierzy	212
Określoność	214
$A^T A$ jest dodatnio (pół)określona	215

Uogólniony rozkład według wartości własnych	216
Podsumowanie	217
Ćwiczenia z programowania	218
<b>14. Rozkład według wartości osobliwych .....</b>	<b>223</b>
Spojrzenie na rozkład według wartości osobliwych z szerszej perspektywy	223
Wartości osobliwe i rzędy macierzy	225
Rozkład według wartości osobliwych w Pythonie	225
Rozkład według wartości osobliwych i „warstwy” macierzy rzędu 1.	226
Rozkład według wartości osobliwych z rozkładu według wartości własnych	228
Rozkład według wartości osobliwych $A^T A$	228
Zamiana wartości osobliwych na wariancję — wyjaśnienie	229
Współczynnik uwarunkowania	230
Rozkład według wartości osobliwych i pseudoodwrotność Moore’a-Penrose’a	231
Podsumowanie	232
Ćwiczenia z programowania	232
<b>15. Zastosowania rozkładu według wartości własnych i rozkładu według wartości osobliwych .....</b>	<b>236</b>
Analiza głównych składowych za pomocą rozkładów według wartości własnych i osobliwych	236
Matematyka analizy głównych składowych	237
Kroki algorytmu analizy głównych składowych	239
Analiza głównych składowych za pomocą rozkładu według wartości osobliwych	239
Liniowa analiza dyskryminacyjna	240
Aproksymacja macierzami niskiego rzędu za pomocą rozkładu według wartości osobliwych	242
Wykorzystanie rozkładu według wartości osobliwych do usuwania szumów	243
Podsumowanie	243
Ćwiczenia z programowania	244
Analiza głównych składowych	244
Liniowa analiza dyskryminacyjna	248
Aproksymacja macierzami niskiego rzędu za pomocą rozkładu według wartości osobliwych	252
Wykorzystanie rozkładu według wartości osobliwych do usuwania szumów z obrazu	255
<b>16. Wprowadzenie do programowania w Pythonie .....</b>	<b>258</b>
Dlaczego Python i jakie są alternatywy?	258
IDE (zintegrowane środowiska programistyczne)	259
Lokalny Python i Python dostępny w sieci	259
Praca z plikami kodu w Google Colab	260



Zmienne	261
Typy danych	262
Indeksowanie	263
Funkcje	264
Metody a funkcje	265
Tworzenie własnych funkcji	265
Biblioteki	266
NumPy	267
Indeksowanie i slicing w NumPy	267
Wizualizacje	268
Zamiana równań na kod	271
Formatowanie wyjścia i f-stringi	273
Przeływ sterowania	274
Operatory porównania	275
Klauzule if	275
Pętle for	277
Zagnieżdżone instrukcje kontrolne	277
Pomiar czasu obliczeń	278
Uzyskiwanie pomocy i więcej informacji	278
Co robić, gdy coś idzie nie tak	278
Podsumowanie	279
<b>Skorowidz .....</b>	<b>281</b>



# Wektory — część I

Wektory stanowią fundament, na którym zbudowana jest cała algebra liniowa (a tym samym reszta tej książki).

Z tego rozdziału dowiesz się wszystkiego o wektorach: czym są, do czego służą, jak je interpretować oraz jak je tworzyć i pracować z nimi w Pythonie. Poznasz najważniejsze działania na wektorach, w tym algebrę wektorów i iloczyn skalarny. Na zakończenie poznasz rozkłady wektorów, które są jednym z głównych problemów algebry liniowej.

## Tworzenie i wizualizacja wektorów w NumPy

W algebrze liniowej **wektor** to uporządkowana lista liczb. (W abstrakcyjnej algebrze liniowej wektory mogą zawierać również inne obiekty matematyczne, w tym funkcje, ale ponieważ ta książka koncentruje się na zastosowaniach, rozważamy w niej tylko wektory zawierające liczby).

Wektory mają kilka ważnych cech. Pierwsze dwie, od których zacznę, to:

### *Wymiarowość*

Określa liczbę liczb w wektorze.

### *Orientacja*

Określa, czy wektor jest **kolumnowy** (wąski i wysoki), czy **wierszowy** (płaski i szeroki).

Wymiarowość wektora często określa się za pomocą fantazyjnie wyglądającego zapisu  $\mathbb{R}^N$ , gdzie  $\mathbb{R}$  oznacza liczby rzeczywiste (np.  $\mathbb{C}$  to liczby zespolone), a  $N$  oznacza liczbę wymiarów. Na przykład wektor zawierający dwa elementy należy do  $\mathbb{R}^2$ . Symbol  $\mathbb{R}$  można utworzyć za pomocą kodu, korzystając z LaTeX-a, ale równie dobrze możesz napisać  $R^2$ ,  $R2$  lub  $R^2$ .

Równanie 2.1 zawiera kilka przykładów wektorów. Przed przeczytaniem kolejnego akapitu spróbuj określić ich wymiary i orientację.

*Równanie 2.1. Przykłady wektorów kolumnowych i wierszowych*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = [1 \ 4 \ 5 \ 6]$$

Oto odpowiedzi:  $\mathbf{x}$  to czterowymiarowy wektor kolumnowy,  $\mathbf{y}$  to dwuwymiarowy wektor kolumnowy, a  $\mathbf{z}$  to czterowymiarowy wektor wierszowy. Możesz też zapisać na przykład, że  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ , gdzie symbol  $\in$  oznacza „należy do zbioru”.

Czy  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{z}$  to ten sam wektor? Technicznie są to różne wektory, pomimo tego, że zawierają te same elementy występujące w tej samej kolejności. Więcej informacji na ten temat znajdziesz nieco dalej w tym rozdziale, w uwadze „Czy orientacja wektora ma znaczenie?”.

W trakcie lektury tej książki oraz podczas łączenia matematyki i programowania dowiesz się, że istnieją różnice między matematyką uprawianą „na tablicy” i matematyką implementowaną w kodzie. Niektóre rozbieżności są niewielkie i nieistotne, inne zaś powodują zamieszanie i błędy. Pozwól, że przedstawię Ci różnice w terminologii stosowanej w matematyce i programowaniu.

Wspomniałem wcześniej, że *wymiarowość* wektora to liczba elementów, które się w nim znajdują. Natomiast w Pythonie wymiarowość wektora lub macierzy to liczba wymiarów geometrycznych używanych do wyświetlenia wektora lub macierzy na ekranie. Na przykład wszystkie wektory pokazane powyżej są w Pythonie „tablicami dwuwymiarowymi”, niezależnie od liczby znajdujących się w nich elementów (czyli ich matematycznej wymiarowości). W Pythonie tablicą jednowymiarową nazywamy listę liczb bez określonej orientacji, niezależnie od liczby znajdującej się w niej elementów (tablica ta zostanie wyświetlona jako wiersz, ale jak zobaczysz później, Python traktuje ją inaczej niż wektory wierszowe). Matematyczna wymiarowość — tzn. liczba elementów w wektorze — nazywana jest w Pythonie długością (ang. *length*) lub kształtem (ang. *shape*) wektora.

Ta niespójna i czasami sprzeczna terminologia może być myląca, ale tak zazwyczaj bywa na styku różnych dyscyplin (w tym przypadku matematyki i informatyki). Nie martw się, przy odrobinie doświadczenia da się to ogarnąć.

Wektory często oznacza się za pomocą małych, pogrubionych liter alfabetu łacińskiego, na przykład  $\mathbf{v}$  oznacza „wektor  $v$ ”. W niektórych tekstach stosuje się też kursywę ( $v$ ) lub umieszcza strzałkę nad literą ( $\vec{v}$ ).

O ile nie określono inaczej, w algebrze liniowej przyjmuje się, że wektory są wektorami kolumnowymi. Wektory wierszowe zapisuje się jako  $\mathbf{w}^T$ . Wykładnik  $T$  reprezentuje **operację transpozycji**, którą omówię później. Na razie zapamiętaj tylko, że operacja transpozycji przekształca wektor kolumnowy w wierszowy.



### Czy orientacja wektora ma znaczenie?

Naprawdę musimy się martwić o to, czy wektory są wektorami kolumnowymi, wierszowymi czy tablicami jednowymiarowymi bez orientacji? Czasami tak, a czasami nie. W przypadku wektorów zawierających dane orientacja zazwyczaj nie ma znaczenia. Z drugiej strony, jeśli orientacja jest niewłaściwa, to niektóre operacje w Pythonie mogą powodować błędy lub dawać nieoczekiwane wyniki. A zatem warto zrozumieć orientację wektorów, aby nie stracić 30 minut na debugowanie kodu tylko po to, by uświadomić sobie, że wektor wierszowy powinien być wektorem kolumnowym (z pewnością taka sytuacja przyprawiłaby Cię o ból głowy).

W Pythonie wektory mogą być reprezentowane przy użyciu kilku typów danych. Najprostszym sposobem reprezentacji wektora wydaje się użycie typu `list`. Choć typ ten sprawdza się w niektórych zastosowaniach, wielu operacji algebry liniowej nie da się wykonać na listach Pythona. Dlatego zazwyczaj najlepiej jest zapisywać wektory w postaci tablic NumPy. Poniżej pokazałem cztery sposoby tworzenia wektora:

```
asList = [1,2,3]
asArray = np.array([1,2,3]) # tablica jednowymiarowa
rowVec = np.array([ [1,2,3] ]) # wiersz
colVec = np.array([ [1],[2],[3] ]) # kolumna
```

Zmienna `asArray` jest tablicą *bez orientacji*, co oznacza, że nie jest ani wektorem wierszowym, ani kolumnowym, lecz po prostu jednowymiarową listą liczb w NumPy. Do określania orientacji w NumPy wykorzystuje się nawiasy — najbardziej zewnętrzne nawiasy łączą wszystkie liczby w jeden obiekt. Każdy dodatkowy zestaw nawiasów reprezentuje wiersz: wektor wierszowy (zmienna `rowVec`) zawiera wszystkie liczby zapisane w jednym wierszu, podczas gdy wektor kolumnowy (zmienna `colVec`) składa się z wielu wierszy, z których każdy zawiera tylko jedną liczbę.

Do zbadania orientacji można wykorzystać atrybut `shape` (możliwość sprawdzania kształtu obiektów często przydaje się podczas programowania):

```
print(f'asList: {np.shape(asList)}')
print(f'asArray: {asArray.shape}')
print(f'rowVec: {rowVec.shape}')
print(f'colVec: {colVec.shape}')
```

Oto wyniki:

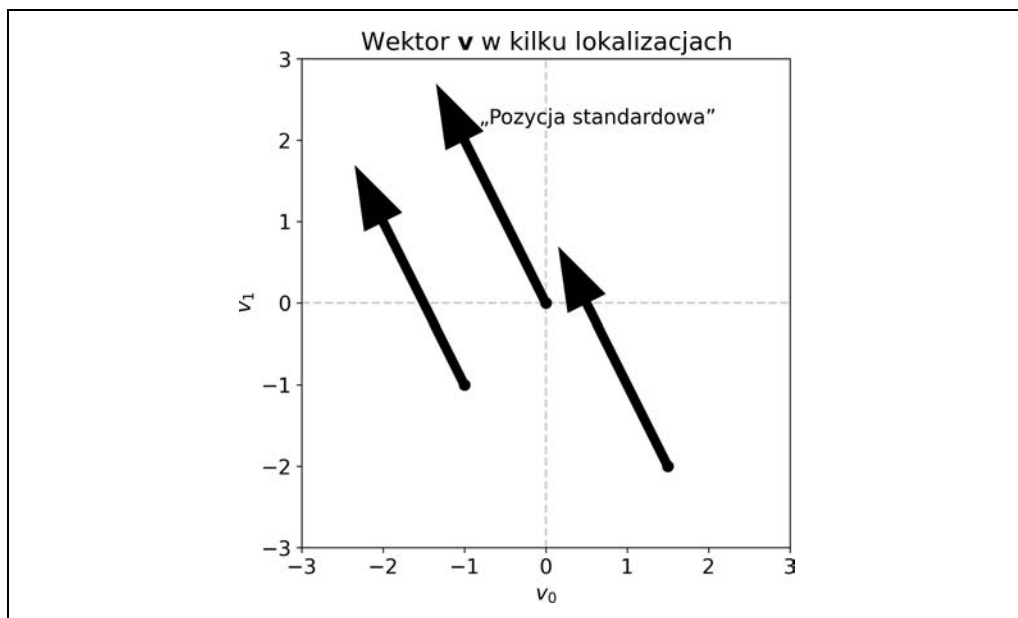
```
asList: (3,)
asArray: (3,)
rowVec: (1, 3)
colVec: (3, 1)
```

Na powyższym listingu widać, że jednowymiarowa tablica `asArray` ma rozmiar (3). Zorientowane wektory są zawsze tablicami dwuwymiarowymi. W zależności od orientacji ich rozmiar to (1,3) lub (3,1). Wymiary są zawsze podawane jako (liczba wierszy, liczba kolumn).

## Geometryczna interpretacja wektorów

Z algebraicznego punktu widzenia wektor to *uporządkowana lista liczb*. Geometrycznie wektor to odcinek linii prostej o określonej długości (nazywanej również **modułem**), kierunku i zwrocie (**kącie pochylenia**; kąt określa się względem dodatniej półosi osi  $x$ ). Dwa punkty na krańcach wektora nazywane są początkiem lub punktem zaczepienia (miejsce, w którym zaczyna się wektor) i końcem (miejsce, w którym wektor się kończy). Koniec wektora rysuje się często w formie grotu strzałki, aby można go było odróżnić od początku.

Może Ci się wydawać, że wektor to zbiór współrzędnych geometrycznych, ale tak naprawdę wektory i współrzędne to dwie różne rzeczy. Taka interpretacja daje poprawne wyniki tylko wtedy, gdy wektor jest zaczepiony w początku układu współrzędnych („pozycja standardowa”), co pokazałem na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1. Wszystkie strzałki reprezentują ten sam wektor. W położeniu standardowym początek wektora znajduje się w początku układu współrzędnych, a koniec — w punkcie określonym przez jego elementy

Geometryczne i algebraiczne interpretacje wektorów pozwalają rozwinąć intuicję w różnych zastosowaniach, ale *de facto* są to dwie strony tej samej monety. Na przykład interpretacja geometryczna przydaje się w fizyce i inżynierii (np. przedstawianie sił fizycznych), a algebraiczna — w analizie danych (np. przechowywanie danych dotyczących sprzedaży w czasie). Często koncepcje algebry liniowej prezentuje się w sposób geometryczny na dwuwymiarowych wykresach, a następnie rozszerza się je na przestrzenie o większej liczbie wymiarów za pomocą algebry.

## Operacje na wektorach

Wektory są jak rzeczowniki. Są to bohaterowie naszej opowieści o algebrze liniowej. Zabawa w algebrę liniową jest możliwa dzięki czasownikom, czyli działaniom, które tchną życie w nasze postaci. Działania te nazywane są **operacjami**.

Niektóre operacje algebry liniowej są proste i intuicyjne i działają dokładnie tak, jak można by się tego spodziewać (np. dodawanie). Inne są bardziej skomplikowane i do ich wyjaśnienia potrzeba całych rozdziałów (np. rozkład według wartości osobliwych). Zacznijmy od prostych operacji.

### Dodawanie dwóch wektorów

Aby dodać do siebie dwa wektory, wystarczy dodać do siebie odpowiadające sobie elementy ich obu. Przykład dodawania wektorów pokazałem w równaniu 2.2.

### Równanie 2.2. Dodawanie dwóch wektorów

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 25 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Jak zapewne się domyślasz, dodawanie wektorów jest zdefiniowane tylko dla wektorów, które mają tę samą liczbę elementów. Nie można dodać do siebie na przykład wektora z  $\mathbb{R}^3$  i wektora z  $\mathbb{R}^5$ .

Odejmowanie wektorów również przebiega zgodnie z naszymi przewidywaniami i polega na odejmowaniu od siebie odpowiadających sobie elementów. Przykład odejmowania pokazałem w równaniu 2.3.

### Równanie 2.3. Odejmowanie dwóch wektorów

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -15 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Dodawanie wektorów w Pythonie jest bardzo proste:

```
v = np.array([4,5,6])
w = np.array([10,20,30])
u = np.array([0,3,6,9])
vPlusW = v+w
uPlusW = u+w # Błąd! Niezgodność wymiarów!
```

Czy orientacja wektora ma znaczenie podczas dodawania? Spójrz na równanie 2.4.

### Równanie 2.4. Czy można dodać wektor wierszowy do wektora kolumnowego?

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + [10 \quad 20 \quad 30] = ?$$

Można by pomyśleć, że nie ma żadnej różnicy pomiędzy tym a pokazanym wcześniej przykładem — w końcu oba wektory mają po trzy elementy. Zobaczmy, co zrobi Python:

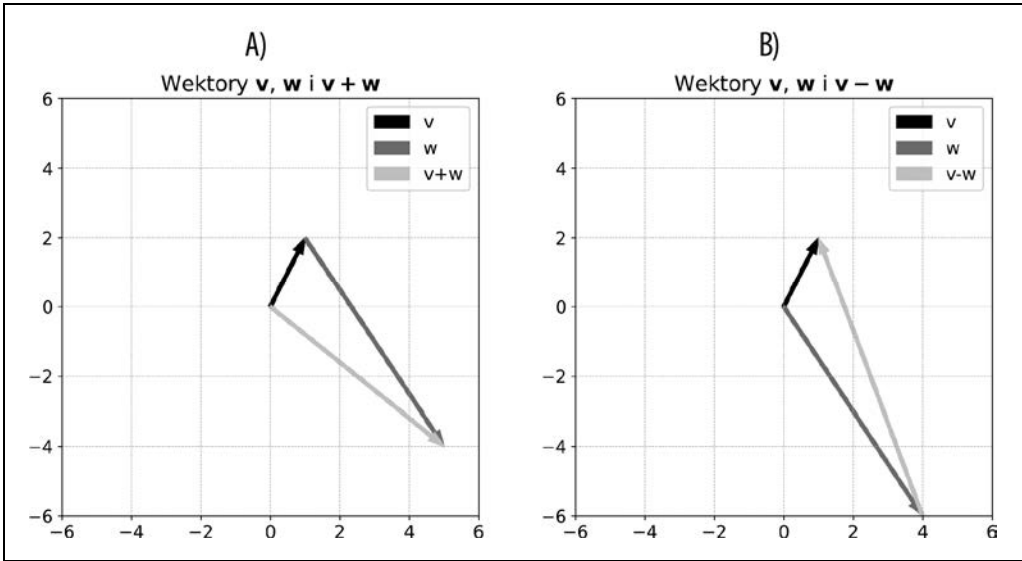
```
v = np.array([[4,5,6]]) # wektor wierszowy
w = np.array([[10,20,30]]).T # wektor kolumnowy
v+w

>> array([[14, 15, 16],
          [24, 25, 26],
          [34, 35, 36]])
```

Wynik może wydawać się mylący i niespójny z podaną wcześniej definicją dodawania wektorów. W Pythonie zaimplementowano operację nazywaną *broadcastingiem*. Więcej na jego temat przeczytasz w dalszej części tego rozdziału, ale zachęcam Cię do poświęcenia chwili na przyjrzenie się temu wynikowi i zastanowienie się, w jaki sposób powstał on z dodania do siebie wektora wierszowego i kolumnowego. Niezależnie od tego przykład ten pokazuje, że orientacja wektora ma znaczenie: *dwa wektory można dodać do siebie tylko wtedy, gdy mają tę samą liczbę elementów i tę samą orientację.*

## Geometryczne dodawanie i odejmowanie wektorów

Aby dodać do siebie dwa wektory w sposób geometryczny, umieść je tak, aby koniec jednego wektora znajdował się w początku drugiego. Wektor będący wynikiem dodawania zaczyna się w początku pierwszego wektora i kończy w końcu drugiego (część A rysunku 2.2). Możesz rozszerzyć tę procedurę na sumowanie dowolnej liczby wektorów: po prostu ułóż wszystkie wektory w taki sposób, żeby koniec poprzedniego był początkiem następnego. Suma tych wektorów to odcinek biegnący od początku pierwszego wektora do końca ostatniego.



Rysunek 2.2. Suma i różnica dwóch wektorów

Geometryczne odejmowanie wektorów przebiega nieco inaczej, ale również w bardzo prosty sposób. Ustaw dwa wektory tak, aby ich początki znajdowały się w tym samym punkcie (można to łatwo zrobić, umieszczając oba wektory w pozycji standardowej); wektor będący wynikiem odejmowania to odcinek biegnący od końca wektora odejmowanego do końca wektora, od którego odejmujemy (część B rysunku 2.2).

Nie lekceważ znaczenia geometrii odejmowania wektorów, jest ona bowiem podstawą ortogonalnego rozkładu wektora, który z kolei jest podstawą liniowej metody najmniejszych kwadratów, czyli jednego z najważniejszych zastosowań algebry liniowej w nauce i inżynierii.

## Mnożenie wektorów przez skalar

W algebrze liniowej **skalar** to samodzielna liczba, która nie znajduje się wewnątrz wektora lub macierzy. Zazwyczaj skalary oznacza się małymi greckimi literami, takimi jak  $\alpha$  lub  $\lambda$ . Z tego powodu mnożenie wektora przez skalar zapisuje się na przykład jako  $\beta \mathbf{u}$ .

Mnożenie wektora przez skalar jest bardzo proste i polega na pomnożeniu każdego elementu wektora przez skalar. Myślę, że do zrozumienia tej operacji wystarczy jeden przykład (równanie 2.5).



$$\lambda = 4, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 36 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

## Wektor zerowy

Wektor składający się z samych zer nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy pogrubionym zerem (**0**). W algebrze liniowej wektor ten ma szczególne znaczenie. Rozwiązanie problemu wykorzystujące wektor zerowy jest często nazywane **rozwiązaniem trywialnym**. Rozwiązanie to często się odrzuca. Algebra liniowa jest pełna takich stwierdzeń jak „znajdź niezerowy wektor będący rozwiązaniem...” lub „znajdź nietrywialne rozwiązanie...”.

Wspomniałem wcześniej, że typ danych wykorzystywany do przechowywania wektora czasami ma znaczenie, a czasami nie. Przykładem, w którym jest on istotny, jest mnożenie wektorów przez skalar:

```
s= 2
a = [3,4,5] # lista
b = np.array(a) # tablica NumPy
print(a*s)
print(b*s)

>> [ 3, 4, 5, 3, 4, 5 ]
>> [ 6 8 10 ]
```

W powyższym kodzie zdefiniowałem skalar (zmienna s) oraz wektor w postaci listy (zmienna a). Następnie przekonwertowałem listę na tablicę NumPy (zmienna b). W Pythonie operator gwiazdki jest przeciążony, co oznacza, że jego zachowanie zależy od typu zmiennej. Mnożenie listy przez skalar zwielokrotnia zawartość listy s razy (w tym przypadku dwa razy), co zdecydowanie *nie* odpowiada mnożeniu wektorów przez skalar z algebry liniowej. Jednak gdy wektor jest przechowywany w postaci tablicy NumPy, gwiazdka jest interpretowana jako mnożenie odpowiadających sobie elementów. (Oto małe ćwiczenie: co się stanie, gdy zdefiniuję s jako 2.0 i dlaczego?<sup>1</sup>). Obie te operacje (powtarzanie zawartości listy i mnożenie wektorów przez skalar) są używane w praktyce. Pamiętaj więc o różnicach pomiędzy nimi.

## Dodawanie wektorów i skalarów

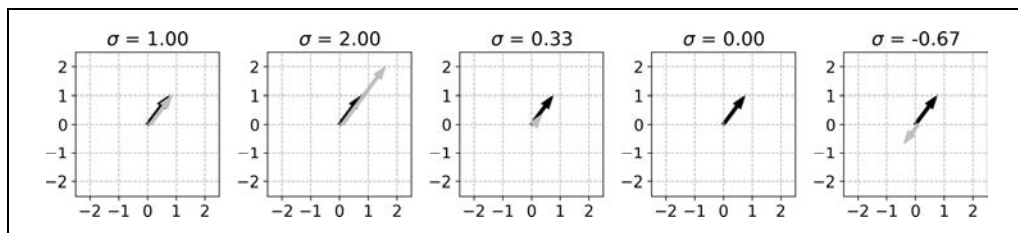
W algebrze liniowej dodawanie do siebie wektorów i skalarów nie jest formalnie zdefiniowane. Są to dwa różne rodzaje obiektów matematycznych i nie można ich ze sobą łączyć. Natomiast programy do obliczeń numerycznych, takie jak Python, pozwalają dodawać do siebie skalary i wektory w sposób podobny do tego, w jaki przeprowadzane jest mnożenie wektora przez skalar. W operacji tej skalar jest po prostu dodawany do każdego elementu wektora. Koncepcję tę pokazałem na poniższym listingu:

<sup>1</sup> Wyrażenie a\*s zwróci błąd, ponieważ zwielokrotnianie listy jest możliwe tylko przy użyciu liczb całkowitych. Nie da się powtórzyć zawartości listy 2,72 raza!

```
s= 2
v = np.array([3,6])
s+v
>> [5 8]
```

## Geometria mnożenia wektor – skalar

Dlaczego skalary nazywane są „skalarami”? Nazwa ta pochodzi od ich interpretacji geometrycznej. Skalary skalują wektory bez zmiany ich kierunku. Mnożenie wektora przez skalar skutkuje jednym z czterech efektów. w zależności od tego. czy skalar jest większy niż 1, ma wartość z przedziału od 0 do 1, ma wartość 0 czy jest ujemny. Efekty te pokazałem na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3. Ten sam wektor (czarna strzałka) pomnożony przez różne skalary  $\sigma$  (wynikowy wektor został zaznaczony na szaro i odrobinę przesunięty, aby był lepiej widoczny)

Wspomniałem wcześniej, że skalary nie zmieniają kierunku wektora. Natomiast na rysunku widać, że po pomnożeniu wektora przez ujemny skalar jego zwrot zmienił się na przeciwny (to znaczy wektor obrócił się o  $180^\circ$ ). Kierunek wektora jest określony przez prostą przechodzącą przez początek i koniec wektora (w następnym rozdziale nazwę tę prostą podprzestrzenią jednowymiarową). W tym sensie „obrócony” wektor nadal wskazuje tę samą prostą, a zatem ujemny skalar nie zmienił jego kierunku. Ta interpretacja ma znaczenie w kontekście przestrzeni macierzowych oraz wektorów własnych i osobliwych. Wszystkie je omówię w kolejnych rozdziałach.

Mnożenie wektorów przez skalar w połączeniu z dodawaniem wektorów prowadzi do **uśredniania wektorów**. Uśrednianie wektorów przebiega tak samo jak liczenie średniej i polega na dodaniu ich do siebie oraz podzieleniu wyniku przez liczbę składników sumy. A zatem aby uśrednić dwa wektory, należy je do siebie dodać, a następnie wynik pomnożyć przez skalar 0,5. Ogólnie rzecz biorąc, aby uśrednić  $N$  wektorów, należy je do siebie dodać i pomnożyć wynik przez  $1/N$ .

## Transpozycja

Poznałeś już operację transpozycji: pozwala ona zmienić wektory kolumnowe w wektory wierszowe i odwrotnie. Podam teraz nieco bardziej formalną definicję, która pozwala transponować również macierze (rozdział 5).

Macierz składa się z wierszy i kolumn. Każdy element macierzy ma indeks (*wiersz, kolumna*). Operacja transpozycji po prostu zamienia te indeksy miejscami. Formalną definicję tej zamiany znajdziesz w równaniu 2.6.

## Równanie 2.6. Operacja transpozycji

$$\mathbf{m}_{i,j}^T = \mathbf{m}_{j,i}$$

W zależności od orientacji wektory mają jeden wiersz lub jedną kolumnę. Na przykład wektor wierszowy z przestrzeni sześciowymiarowej zawiera indeks  $i = 1$ , natomiast indeks  $j$  zmienia się w nim od 1 do 6. Sześciowymiarowy wektor kolumnowy ma indeks  $j = 1$ , natomiast indeks  $i$  zmienia się w nim od 1 do 6. A zatem zamiana indeksów  $i, j$  miejscami spowoduje zamianę wierszy i kolumn.

Uwaga: dwukrotna transpozycja przywraca wektorowi jego pierwotną orientację. Innymi słowy  $\mathbf{v}^{TT} = \mathbf{v}$ . Choć może się to wydawać oczywiste i trywialne, tożsamość ta jest kluczowym elementem kilku ważnych dowodów w nauce o danych i uczeniu maszynowym. Pozwala ona między innymi tworzyć symetryczne macierze kowariancji poprzez mnożenie macierzy danych przez jej transpozycję (co z kolei jest powodem, dla którego analiza głównych składowych jest ortogonalnym obrotem w przestrzeni danych... nie martw się, to zdanie zyska sens w dalszej części książki!).

## Broadcasting w Pythonie

Broadcasting to operacja, która istnieje tylko w nowoczesnej algebrze liniowej wykonywanej na komputerach. Nie jest to procedura, którą można znaleźć w tradycyjnym podręczniku do algebry liniowej.

Broadcasting polega na wielokrotnym powtórzeniu operacji między jednym wektorem a każdym elementem innego wektora. Spójrz na następujący ciąg równań:

$$\begin{aligned} [1 \quad 1] + [10 \quad 20] \\ [2 \quad 2] + [10 \quad 20] \\ [3 \quad 3] + [10 \quad 20] \end{aligned}$$

Zwróć uwagę na wzór w wektorach. Możemy zwięźle zaimplementować ten ciąg przekształceń, kondensując te elementy w wektorach  $[1 \ 2 \ 3]$  i  $[10 \ 20]$ , które następnie dodamy do siebie z wykorzystaniem broadcastingu. Oto jak obliczenia te wyglądałyby w Pythonie:

```
v = np.array([[1,2,3]]) .T # wektor kolumnowy
w = np.array([[10,20]]) # wektor wierszowy
v + w # dodawanie z użyciem broadcastingu

>> array([[11, 21],
          [12, 22],
          [13, 23]])
```

Jest to kolejny przykład, w którym orientacja ma znaczenie: spróbuj uruchomić powyższy kod, zmieniając  $v$  w wektor wierszowy i  $w$  w wektor kolumnowy<sup>2</sup>.

Ponieważ broadcasting umożliwia wydajne i zwarte obliczenia, często wykorzystuje się go w obliczeniach numerycznych. W tej książce zobaczysz kilka przykładów broadcastingu. Wykorzystam go na przykład w podrozdziale dotyczącym klasteryzacji za pomocą algorytmu  $k$ -średnich (rozdział 4.).

---

<sup>2</sup> W tym przypadku Python również przeprowadzi broadcasting, ale wynik będzie macierzą  $3 \times 2$ , a nie  $2 \times 3$ .

# Moduł wektora i wektory jednostkowe

**Moduł** wektora (nazywany także **długością geometryczną** lub **normą**) to odległość od początku do końca wektora. Oblicza się go za pomocą standardowego wzoru na odległość w przestrzeni euklidesowej, czyli jako pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów elementów wektora (równanie 2.7). Moduł wektora oznacza się za pomocą symbolu składającego się z podwójnych pionowych kresek umieszczonych po obu stronach nazwy wektora:  $\| \mathbf{v} \|$ .

Równanie 2.7. Norma wektora

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

W niektórych zastosowaniach wykorzystuje się kwadrat modułu (oznaczany jako  $\| \mathbf{v} \|^2$ ). W tym przypadku po prawej stronie powyższej formuły nie występuje pierwiastek kwadratowy.

Zanim pokażę Ci kod w Pythonie, pozwól, że wyjaśnię jeszcze kilka rozbieżności terminologicznych pomiędzy algebrą liniową uprawianą „na tablicy” a algebrą liniową w Pythonie. W matematyce wymiarowość wektora to liczba elementów, które się w nim znajdują, a długość wektora to odległość w sensie geometrycznym. Natomiast w Pythonie funkcja `len()` (gdzie `len` jest skrótem od ang. *length* — „długość”) zwraca *wymiarowość* tablicy, podczas gdy funkcja `np.norm()` oblicza długość geometryczną (moduł). Aby uniknąć nieporozumień, w tej książce będę używał terminu „moduł” (lub „długość geometryczna”) zamiast „długość”:

```
v = np.array([1,2,3,7,8,9])
v_dim = len(v) # wymiarowość w sensie matematycznym
v_mag = np.linalg.norm(v) # moduł, długość geometryczna lub norma
```

W niektórych zastosowaniach potrzebujemy wektora o długości geometrycznej równej 1. Wektor ten nazywamy **wektorem jednostkowym**. Wektory jednostkowe wykorzystuje się na przykład w macierzach ortogonalnych, macierzach rotacji, wektorach własnych i wektorach osobliwych.

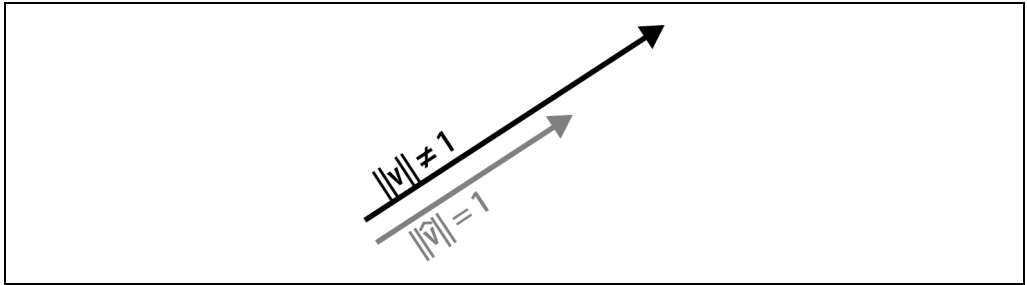
Wektor jednostkowy definiuje się jako  $\| \mathbf{v} \| = 1$ .

Nie muszę chyba dodawać, że wiele wektorów nie jest wektorami jednostkowymi. (Kusi mnie, aby napisać, że „większość wektorów nie jest wektorami jednostkowymi”, ale istnieje nieskończenie wiele wektorów jednostkowych i nieskończenie wiele wektorów niejednostkowych. Co gorsza zbiór tych pierwszych jest równoliczny ze zbiorem tych drugich). Na szczęście z każdym wektorem niejednostkowym związany jest wektor jednostkowy. Oznacza to, że możemy utworzyć wektor jednostkowy o kierunku zgodnym z odpowiadającym mu wektorem niejednostkowym. Utworzenie takiego wektora jednostkowego jest proste. Wystarczy pomnożyć wektor niejednostkowy przez skalar będący odwrotnością jego długości geometrycznej (równanie 2.8).

Równanie 2.8. Tworzenie wektora jednostkowego

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\| \mathbf{v} \|} \mathbf{v}$$

Przyjęło się, że wektory jednostkowe ( $\hat{\mathbf{v}}$ ) mają ten sam zwrot co powiązane z nimi wektory niejednostkowe ( $\mathbf{v}$ ). Sytuację tę pokazałem na rysunku 2.4.



Rysunek 2.4. Wektor jednostkowy (szara strzałka) można utworzyć na podstawie wektora niejednostkowego (czarna strzałka); oba mają ten sam kierunek, ale różnią się długością geometryczną

W rzeczywistości twierdzenie, że „z każdym wektorem niejednostkowym związany jest wektor jednostkowy”, nie jest do końca prawdziwe. Istnieje wektor, którego moduł jest różny od 1 i nie jest z nim związany żaden wektor jednostkowy. Czy potrafisz zgadnąć, jaki to wektor?<sup>3</sup>

W tym podrozdziale nie zamieściłem kodu tworzącego wektory jednostkowe, ponieważ jego napisanie jest jednym z ćwiczeń zamieszczonych na końcu tego rozdziału.

## Iloczyn skalarny wektorów

**Iloczyn skalarny** (czasami nazywany **iloczynem wewnętrznym**) jest jedną z najważniejszych operacji w całej algebrze liniowej. Jest to podstawowy blok obliczeniowy, który wykorzystuje się w wielu operacjach i algorytmach algebry liniowej, m.in. w obliczaniu splotu/konwolucji i korelacji, transformacie Fouriera, mnożeniu macierzy, liniowej ekstrakcji cech oraz filtrowaniu sygnału.

Istnieje kilka sposobów oznaczania iloczynu skalarnego dwóch wektorów. Najczęściej będę stosował dość powszechną notację  $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$  z powodów, które staną się jasne po zapoznaniu się z mnożeniem macierzy. Czasami iloczyn skalarny wektorów oznacza się również jako  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  lub  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ .

Iloczyn skalarny to pojedyncza liczba, która dostarcza nam informacje o relacji między dwoma wektorami. Najpierw skupimy się na algorytmie obliczania iloczynu skalarnego. Następnie wyjaśnię, jak należy interpretować jego wynik.

Aby obliczyć iloczyn skalarny, musisz wymnożyć odpowiadające sobie elementy z dwóch wektorów, a następnie dodać do siebie otrzymane wyniki. W równaniu 2.9  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  są wektorami,  $\mathbf{a}_i$  zaś oznacza  $i$ -tą składową wektora  $\mathbf{a}$ .

<sup>3</sup> Wektor zerowy ma długość geometryczną równą 0. Z wektorem tym nie jest związany żaden wektor jednostkowy, ponieważ wektor zerowy nie ma kierunku i nie da się go przeskalować tak, aby jego długość była różna od zera.

Równanie 2.9. Definicja iloczynu skalarnego wektorów

$$\delta = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Z powyższego wzoru możemy wywnioskować, że iloczyn skalarny da się obliczyć tylko między dwoma wektorami o tej samej wymiarowości. Przykład liczbowy pokazałem w równaniu 2.10.

Równanie 2.10. Przykład obliczenia iloczynu skalarnego

$$\begin{aligned} [1 \ 2 \ 3 \ 4] \cdot [5 \ 6 \ 7 \ 8] &= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \\ &= 5 + 12 + 21 + 32 \\ &= 70 \end{aligned}$$



### Irytujące indeksowanie

Standardowa notacja matematyczna i niektóre zorientowane na matematykę programy do wykonywania obliczeń numerycznych, takie jak MATLAB i Julia, rozpoczynają indeksowanie od 1 i kończą na  $N$ . Natomiast w niektórych językach programowania, takich jak Python i Java, indeksowanie rozpoczyna się od 0 i kończy na  $N - 1$ . Nie chcę debatować nad zaletami i ograniczeniami każdego z tych rozwiązań (choć czasami zastanawiam się, ile błędów spowodowała ta niekonsekwencja). Ważne jest, aby pamiętać o tej różnicy podczas tłumaczenia wzorów matematycznych na kod w Pythonie.

Istnieje wiele sposobów implementacji iloczynu skalarnego w Pythonie, a najprostszym sposobem jego obliczenia jest użycie funkcji `np.dot()`:

```
v = np.array([1,2,3,4])
w = np.array([5,6,7,8])
np.dot(v,w)
```



### Uwaga dotycząca `np.dot()`

Funkcja `np.dot()` w rzeczywistości nie jest implementacją wektorowego iloczynu skalarnego, lecz implementacją mnożenia macierzy, które jest zbiorem iloczynów skalarnych. Wyjaśni się to, gdy zapoznasz się z zasadami i mechanizmami mnożenia macierzy (rozdział 5.). Jeśli chcesz teraz zbadać działanie tej funkcji, możesz zmodyfikować powyższy kod i nadać obu wektorom orientację (iloczyn wektora wierszowego i kolumnowego). Po kilku eksperymentach odkryjesz, że funkcja zwraca wynik iloczynu skalarnego tylko wtedy, gdy jej pierwszy argument jest wektorem wierszowym, a drugi wektorem kolumnowym.

Oto ciekawa własność iloczynu skalarnego: pomnożenie przez skalar jednego z występujących w nim wektorów spowoduje przeskalowanie iloczynu skalarnego o tę samą wartość. Możesz to sprawdzić, modyfikując powyższy kod:

```
s = 10
np.dot(s*v,w)
```

Iloczyn skalarny  $v$  i  $w$  ma wartość 70, a iloczyn skalarny z użyciem  $s*v$  (co w notacji matematycznej można by zapisać jako  $\sigma v^T w$ ) to 700. Spróbuj powtórzyć te obliczenia z ujemnym skalarzem, np.  $s = -1$ . Zobaczysz, że wartość iloczynu skalarnego zostanie zachowana, ale jego znak zmieni się na przeciwny. Oczywiście gdy  $s = 0$ , to iloczyn skalarny będzie równy zero.

Wiesz już, jak obliczyć iloczyn skalarny. Zastanówmy się, co oznacza ta wartość i jak się ją interpretuje.

Iloczyn skalarny można interpretować jako miarę *podobieństwa* lub *odwzorowanie* między dwoma wektorami. Wyobraź sobie, że masz dane dotyczące wzrostu i wagi 20 osób, które przechowujesz w dwóch wektorach. Z pewnością możemy oczekiwać, że te zmienne są ze sobą w jakiś sposób powiązane (wyższe osoby zwykle ważą więcej), a zatem można by oczekiwać, że iloczyn skalarny tych dwóch wektorów będzie duży. Z drugiej strony wartość iloczynu skalarnego zależy od skali danych, co oznacza, że iloczyn skalarny danych mierzonych w gramach i centymetrach będzie większy niż iloczyn skalarny tych samych danych zapisanych w funtach i stopach. To arbitralne skalowanie można jednak wyeliminować za pomocą współczynnika normalizacji. Znormalizowany iloczyn skalarny dwóch zmiennych nazywamy **współczynnikiem korelacji Pearsona**. Jest to jedna z najważniejszych miar stosowanych w nauce o danych. Więcej na ten temat w rozdziale 4.!

## Iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania

W matematyce rozdzielność względem dodawania polega na tym, że  $a(b + c) = ab + ac$ . W kategoriach wektorów i ich iloczynu skalarnego oznacza to, że:

$$a^T(b + c) = a^T b + a^T c$$

Można powiedzieć, że iloczyn skalarny sumy wektorów jest równy sumie iloczynów skalarnych.

W poniższym kodzie w Pythonie pokazałem rozdzielność iloczynu skalarnego względem dodawania:

```
v = np.array([ 0,1,2 ])
b = np.array([ 3,5,8 ])
c = np.array([ 13,21,34 ])

# iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania
res1 = np.dot( a, b+c )
res2 = np.dot( a,b ) + np.dot( a,c )
```

Zmienne `res1` i `res2` zawierają tę samą wartość (dla tych wektorów jest to 110), co ilustruje rozdzielność iloczynu skalarnego względem dodawania. Zwróć uwagę na to, w jaki sposób wzór matematyczny został przetłumaczony na kod w Pythonie. Tłumaczenie wzorów na kod jest ważną umiejętnością w programowaniu zorientowanym na matematykę.

## Geometryczna interpretacja iloczynu skalarnego

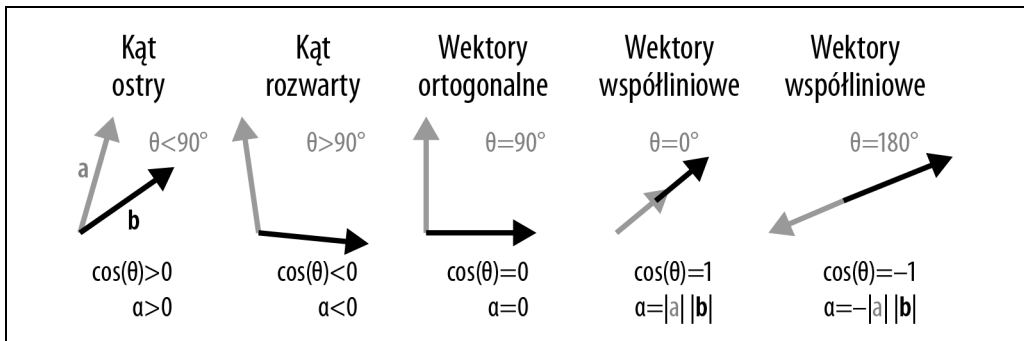
Istnieje również geometryczna definicja iloczynu skalarnego. Zgodnie z nią iloczyn skalarny to iloczyn modułów dwóch wektorów przeskalowany przez cosinus kąta pomiędzy nimi (równanie 2.11).

Równanie 2.11. Geometryczna definicja iloczynu skalarnego wektora

$$\alpha = \cos(\theta_{v,w}) \|v\| \|w\|$$

Równania 2.9 i 2.11 są sobie równoważne, ale zostały zapisane w dwóch różnych formach. Dowód ich równoważności jest interesującym zadaniem z obszaru analizy matematycznej, ale jego zaprezentowanie wymagałoby około strony tekstu. Dowód ten opiera się na uprzednim udowodnieniu innych zasad, w tym twierdzenia cosinusów. Z punktu widzenia treści tej książki dowód ten nie jest istotny i zdecydowałem się go pominąć.

Zauważ, że moduły wektorów są wielkościami ściśle dodatnimi (z wyjątkiem wektora zerowego, dla którego  $\|\mathbf{v}\| = 0$ ). Natomiast cosinus kąta pomiędzy wektorami to wartość z przedziału od  $-1$  do  $+1$ . Oznacza to, że znak iloczynu skalarnego zależy jedynie od geometrycznej relacji pomiędzy wektorami. Rysunek 2.5 przedstawia pięć przypadków wartości znaku iloczynu skalarnego w zależności od kąta między dwoma wektorami (na rysunku zostały pokazane wykresy dwuwymiarowe, ale zasada ta obowiązuje także w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów).



Rysunek 2.5. Znak iloczynu skalarnego dwóch wektorów określa zależność geometryczną między wektorami



### Zapamiętaj: iloczyn skalarny wektorów ortogonalnych ma wartość zero

Niektórzy nauczyciele matematyki uważają, że nie należy zapamiętywać wzorów i terminów, lecz trzeba rozumieć procedury i dowody. Bądźmy szczerzy: zapamiętywanie jest ważną i nieuniknioną częścią nauki matematyki. Na szczęście algebra liniowa nie wymaga zapamiętania zbyt wielu informacji. Jest jednak kilka rzeczy, które po prostu należy zapamiętać.

Oto jedna z nich: iloczyn skalarny wektorów ortogonalnych ma wartość zero (twierdzenie to działa w obie strony — gdy iloczyn skalarny jakichś wektorów wynosi zero, to te dwa wektory są ortogonalne względem siebie). A zatem następujące stwierdzenia są sobie równoważne: dwa wektory są ortogonalne; iloczyn skalarny dwóch wektorów jest równy zero; dwa wektory przecinają się pod kątem  $90^\circ$ . Powtarzaj tę równoważność, aż trwale zapisze się ona w Twojej pamięci.

## Inne sposoby mnożenia wektorów

Iloczyn skalarny jest prawdopodobnie najważniejszym i najczęściej używanym sposobem mnożenia wektorów. Istnieje jednak kilka innych sposobów mnożenia wektorów.



## Iloczyn Hadamarda

Iloczyn ten to tylko wymyślne określenie na mnożenie odpowiadających sobie elementów. Implementacja iloczynu Hadamarda polega na pomnożeniu odpowiadających sobie elementów z obu wektorów. Wynik tego iloczynu jest wektorem o tej samej wymiarowości co jego składniki. Na przykład:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

W Pythonie do mnożenia odpowiadających sobie elementów wektorów lub macierzy służy operator gwiazdki:

```
a = np.array([5,4,8,2])
b = np.array([1,0,.5])
a*b
```

Spróbuj uruchomić ten kod w Pythonie... Och! Python zwrócił błąd. Znajdź go i spróbuj naprawić. Czego można się nauczyć o iloczynie Hadamarda na podstawie tego błędu? Odpowiedź znajdziesz w przypisie<sup>4</sup>.

Iloczyn Hadamarda jest wygodnym sposobem implementacji wielokrotnych mnożeń przez skalar. Wyobraź sobie, że masz dane dotyczące liczby przedmiotów sprzedanych w różnych sklepach oraz ich ceny w każdym z nich. Każdą zmienną możesz przedstawić jako wektor, a następnie obliczyć ich iloczyn Hadamarda. W wyniku otrzymasz przychody ze sprzedaży poszczególnych towarów w *konkretnych sklepach* (jest to coś innego niż łączny przychód ze sprzedaży wszystkich produktów we *wszystkich sklepach*, który można obliczyć jako iloczyn skalarny tych wektorów).

## Iloczyn zewnętrzny

Iloczyn zewnętrzny to sposób na utworzenie macierzy z wektora kolumnowego i wierszowego. Każdy wiersz w macierzy będącej wynikiem tego iloczynu jest wynikiem mnożenia wektora wierszowego przez skalar pochodzący z odpowiadającej mu pozycji w wektorze kolumnowym. Możemy również powiedzieć, że każda kolumna wynikowej macierzy jest wynikiem mnożenia wektora kolumnowego przez skalar będący odpowiadającym mu elementem wektora wierszowego. W rozdziale 6. wynik tego mnożenia będę nazywał „macierzą rzędu pierwszego”, ale na razie nie martw się znaczeniem tego określenia i skup się na wzorcu przedstawionym w poniższym przykładzie:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} [d \quad e] = \begin{bmatrix} ad & ae \\ bd & be \\ cd & ce \end{bmatrix}$$

---

<sup>4</sup> Błąd jest związany z tym, że wektory te mają różną wymiarowość. Pokazuje on, że iloczyn Hadamarda jest zdefiniowany jedynie dla wektorów o tej samej liczbie składowych. Możesz naprawić ten błąd, usuwając jedną wartość z wektora a lub dodając jedną składową do wektora b.

## Litery w algebrze liniowej

Ze szkoły średniej wiesz, że stosowanie liter w roli abstrakcyjnych symboli zastępczych dla liczb pozwala poznać matematykę głębiej niż sama arytmetyka. Ta sama koncepcja ma zastosowanie w algebrze liniowej. Czasami, gdy ułatwia to zrozumienie, wewnątrz macierzy nauczyciele umieszczają litery zamiast liczb. Możesz o nich myśleć tak jak o zmiennych.

Iloczyn zewnętrzny różni się znacznie od iloczynu skalarnego. Jego wynikiem jest macierz, a nie skalar. Dwa wektory będące elementami iloczynu zewnętrznego mogą należeć do przestrzeni o różnej liczbie wymiarów, co jest niedopuszczalne w iloczynie skalarnym, w którym wymiarowość obu wektorów musi być taka sama.

Iloczyn zewnętrzny zapisujemy jako  $\mathbf{vw}^T$  (pamiętaj, że zakładamy, iż wektory są wektorami kolumnowymi, a zatem iloczyn zewnętrzny polega na pomnożeniu kolumny przez wiersz). Zwróć uwagę na subtelną, ale ważną różnicę między zapisem iloczynu skalarnego ( $\mathbf{v}^T\mathbf{w}$ ) i iloczynu zewnętrznego ( $\mathbf{vw}^T$ ). Zapis ten może się wydawać dziwny i nieco zagmatwany, ale obiecuję, że zyska on sens, gdy zapoznasz się z mnożeniem macierzy opisanym w rozdziale 5.

Iloczyn zewnętrzny przypomina nieco operację *broadcastingu*, ale nie jest to samo: *broadcasting* to funkcjonalność języka programowania, która pozwala rozszerzać wektory podczas wykonywania operacji arytmetycznych, takich jak dodawanie, mnożenie i dzielenie, natomiast *iloczyn zewnętrzny* jest procedurą matematyczną służącą do mnożenia dwóch wektorów.

W NumPy możesz obliczyć iloczyn zewnętrzny za pomocą funkcji `np.outer()`. Wyznaczysz go również za pomocą funkcji `np.dot()`, jeśli przekażesz jej w pierwszym argumencie wektor kolumnowy, a w drugim wektor wierszowy.

## Iloczyn wektorowy i mieszany

Istnieje kilka innych sposobów mnożenia wektorów, w tym iloczyn wektorowy lub mieszany. Metody te są stosowane w geometrii i fizyce, ale w zastosowaniach związanych z informatyką nie pojawiają się na tyle często, aby poświęcać im więcej uwagi w tej książce. Wspominam o nich tylko po to, abyś był zaznajomiony z ich nazwami.

## Ortogonalny rozkład wektora

„Rozkład” wektora lub macierzy oznacza rozbicie tych struktur na wiele prostszych elementów. Celem rozkładów jest ujawnienie informacji „ukrytych” w macierzy. Robi się to, aby ułatwić sobie pracę z macierzą lub skompresować przechowywane w niej dane. Stwierdzenie, że znaczna część algebry liniowej (zarówno abstrakcyjnej, jak i praktycznej) to rozkłady macierzy, nie jest przesadą. Rozkłady macierzy to wielka sprawa.

Pozwól, że wyjaśnię Ci pojęcie rozkładu na dwóch prostych przykładach liczbowych:

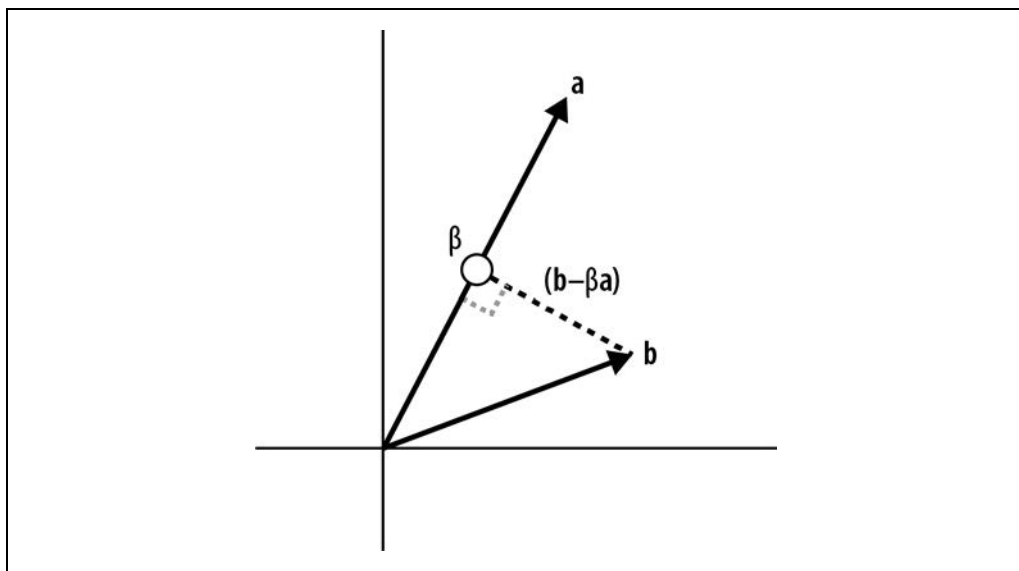
- Liczbę 42,01 możemy rozłożyć na dwie części: 42 i 0,01. Wartość 0,01 może być szumem, który chcę odfiltrować, a może zależy mi na kompresji danych (do zapamiętania liczby 42 w typie

całkowitoliczbowym potrzeba mniej pamięci niż do zapisania zmiennoprzecinkowej wartości (42,01). Niezależnie od motywacji rozkład polega na przedstawieniu jednego obiektu matematycznego w postaci sumy prostszych składników ( $42 = 42 + 0,01$ ).

- Liczbę 42 możemy też rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych 2, 3 i 7. Rozkład ten nazywamy **rozkładem na czynniki pierwsze**. Ma on wiele zastosowań w obliczeniach numerycznych oraz w kryptografii. W tym przykładzie zamiast sumy otrzymujemy iloczyn, ale cel jest nadal ten sam: chcemy rozłożyć jeden obiekt matematyczny na mniejsze, prostsze części.

W tym podrozdziale przyjrzymy się prostemu, ale ważnemu rozkładowi, który polega na rozbiciu wektora na dwa wektory, z których jeden jest prostopadły, a drugi równoległy do wektora referencyjnego. Rozkład ortogonalny wektorów prowadzi bezpośrednio do procedury Grama-Schmidta i rozkładu QR, który często wykorzystuje się do rozwiązywania problemów odwrotnych w statystyce.

Zacznijmy od rysunku, który pozwoli Ci zwiualizować sobie cel rozkładu. Na rysunku 2.6 pokazałem następującą sytuację: mamy dwa wektory,  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$ , w pozycji standardowej i chcemy znaleźć punkt leżący na wektorze  $\mathbf{a}$ , który znajduje się jak najbliżej końca wektora  $\mathbf{b}$ . Problem ten można również wyrazić w kategoriach optymalizacji: szukamy rzutu wektora  $\mathbf{b}$  na wektor  $\mathbf{a}$ , dla którego odległość jest minimalna. Oczywiście punkt znajdujący się na wektorze  $\mathbf{a}$  będzie przeskalowaną wersją  $\mathbf{a}$ . Innymi słowy będzie to  $\beta\mathbf{a}$ . A zatem naszym celem jest znalezienie skalaru  $\beta$ . (Związek tego opisu z ortogonalnym rozkładem wektorów wkrótce stanie się jasny).



Rysunek 2.6. Do znalezienia rzutu punktu znajdującego się w końcu wektora  $\mathbf{b}$  na wektor  $\mathbf{a}$  minimalizującego odległość potrzebujemy wzoru na  $\beta$ , dla którego długość wektora  $\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}$  jest możliwie najmniejsza

Co ważne, do zdefiniowania odcinka od  $\mathbf{b}$  do  $\beta\mathbf{a}$  możemy wykorzystać odejmowanie wektorów. Moglibyśmy nadać temu odcinkowi własną literę, np.  $\mathbf{c}$ , ale nie zmieni to faktu, że do znalezienia rozwiązania niezbędne będzie odejmowanie.

Kluczowym spostrzeżeniem, które doprowadzi nas do rozwiązania tego problemu, jest to, że punkt leżący na  $\mathbf{a}$ , który jest najbliżej końca  $\mathbf{b}$ , można znaleźć, rysując linię z  $\mathbf{b}$ , która łączy się z  $\mathbf{a}$  pod kątem prostym. Wyobraź sobie trójkąt utworzony przez początek układu współrzędnych oraz końce wektorów  $\mathbf{b}$  i  $\beta\mathbf{a}$ . Długość odcinka od  $\mathbf{b}$  do  $\beta\mathbf{a}$  wzrasta, gdy  $\beta\mathbf{a}$  staje się mniejszy lub większy niż  $90^\circ$ .

Łącząc ze sobą te informacje, możemy wywnioskować, że  $\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}$  musi być ortogonalne do  $\beta\mathbf{a}$ . Stwierdzenie to jest równoważne temu, że wektory te powinny być do siebie prostopadłe. A to oznacza, że ich iloczyn skalarny musi wynosić zero. Przekształćmy te słowa w równanie:

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}) = 0$$

Teraz możemy zastosować przekształcenia algebraiczne do wyznaczenia z tego równania  $\beta$  (zwróć uwagę, że skorzystałem z rozdzielności iloczynu skalarnego względem dodawania). Przekształcenia pokazałem w równaniu 2.12.

*Równanie 2.12. Rozwiązanie problemu znalezienia rzutu ortogonalnego*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}^T\mathbf{a} &= 0 \\ \beta\mathbf{a}^T\mathbf{a} &= \mathbf{a}^T\mathbf{b} \\ \beta &= \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} \end{aligned}$$

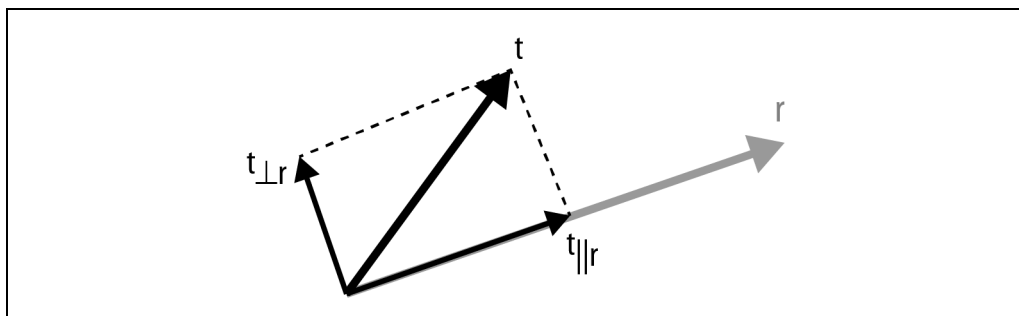
Pięknie: zaczęliśmy od prostego rysunku geometrycznego, zbadaliśmy implikacje praw geometrii, wyraziliśmy je w postaci wzoru, a następnie zastosowaliśmy trochę algebry. W rezultacie otrzymaliśmy wzór na rzutowanie punktu na prostą z zachowaniem minimalnej odległości. Rzut ten nazywa się **rzutem ortogonalnym**. Ma on wiele zastosowań w statystyce i uczeniu maszynowym. Występuje m.in. w słynnej formule najmniejszych kwadratów wykorzystywanej do dopasowywania modeli liniowych (rzuty ortogonalne zobaczysz w rozdziałach 9., 10. i 11.).

Mogę sobie wyobrazić, że bardzo Cię ciekawi, jak wyglądałaby implementacja tego rzutu w Pythonie. Nie pokażę Ci jej, ponieważ jest ona tematem zadania 2.8 z końca tego rozdziału. Jeśli nie możesz się już doczekać końca tego rozdziału, rozwiąż to ćwiczenie teraz, a potem wróć do dalszego opisu rozkładu ortogonalnego.

Być może się zastanawiasz, jak powyższy opis ma się do ortogonalnego rozkładu wektora, czyli tytułu tego podrozdziału. Rzut z minimalną odległością jest niezbędny do jego zrozumienia. Skoro go już znasz, możemy przejść do samego rozkładu.

Jak zwykle zaczynam od sytuacji początkowej i celu. Zaczynamy od dwóch wektorów, które będę nazywał „wektorem docelowym” i „wektorem referencyjnym”. Naszym celem jest rozłożenie wektora docelowego na dwa inne wektory w taki sposób, że (1) suma tych dwóch wektorów daje wektor docelowy oraz że (2) jeden z tych dwóch wektorów jest prostopadły do wektora referencyjnego, a drugi jest do niego równoległy. Sytuację tę pokazałem na rysunku 2.7.

Zanim zaczniemy zabawę w matematykę, ustalmy oznaczenia. Wektor docelowy będę nazywał wektorem  $\mathbf{t}$ , a wektor referencyjny wektorem  $\mathbf{r}$ . Dwa wektory utworzone z wektora docelowego będą nazywane *składową prostopadłą* ( $\mathbf{t}_{\perp\mathbf{r}}$ ) oraz *składową równoległą* ( $\mathbf{t}_{\parallel\mathbf{r}}$ ).



Rysunek 2.7. Ilustracja ortogonalnego rozkładu wektora: rozkładam wektor  $t$  na sumę dwóch innych wektorów, z których jeden jest ortogonalny, a drugi równoległy do wektora  $r$

Zaczynam od zdefiniowania składowej równoległej. Czym jest wektor równoległy do  $r$ ? Cóż, każda przeskalowana wersja  $r$  jest oczywiście równoległa do  $r$ . A zatem aby znaleźć  $t_{\parallel r}$ , wystarczy po prostu zastosować wzór na rzut ortogonalny, który właśnie odkryliśmy (równanie 2.13).

Równanie 2.13. Znajdowanie składowej  $t$  równoległej do  $r$

$$t_{\parallel r} = r \frac{t^T r}{r^T r}$$

Zwróć uwagę na subtelną różnicę w stosunku do równania 2.12. W poprzednim równaniu szukaliśmy skalaru  $\beta$ , tym razem chcemy znaleźć przeskalowany wektor  $\beta r$ .

Mamy już składową równoległą. Jak znaleźć składową prostopadłą? Można to zrobić w jeszcze prostszy sposób, ponieważ wiemy już, że te dwie składowe muszą sumować się do pierwotnego wektora docelowego. A zatem:

$$\begin{aligned} t &= t_{\perp r} + t_{\parallel r} \\ t_{\perp r} &= t - t_{\parallel r} \end{aligned}$$

Innymi słowy, od pierwotnego wektora odejmujemy składową równoległą, a otrzymana reszta to nasza składowa prostopadła.

Czy wyznaczona składowa prostopadła *naprawdę* jest prostopadła do wektora referencyjnego? Tak! Aby to udowodnić, wystarczy pokazać, że iloczyn skalarny składowej prostopadłej i wektora referencyjnego ma wartość zero:

$$\begin{aligned} (t_{\perp r})^T r &= 0 \\ \left( t - r \frac{t^T r}{r^T r} \right)^T r &= 0 \end{aligned}$$

Przekształcenia zastosowane w tym dowodzie są proste, ale bardzo żmudne, dlatego je pominąłem. Zamiast tego proponuję popracować nad ćwiczeniami, bo to pozwoli Ci wyrobić sobie wyczucie za pomocą kodu Pythona.

Mam nadzieję, że polubiłeś ortogonalny rozkład wektorów. Raz jeszcze chciałbym zwrócić Twoją uwagę na ogólną zasadę towarzyszącą rozkładom: rozkład to rozbicie jednego obiektu matematycznego na kombinację innych. Szczegóły dotyczące tego, jak to zrobić, zależą od ograniczeń (w tym

przypadku była to ortogonalność i równoległość względem wektora referencyjnego), co oznacza, że różne ograniczenia (czyli różne cele) mogą prowadzić do różnych rozkładów tego samego wektora.

## Podsumowanie

Piękno algebry liniowej polega na tym, że nawet najbardziej wyrafinowane i wymagające dużej mocy obliczeniowej operacje na macierzach składają się z szeregu prostych operacji, z których większość można zrozumieć za pomocą geometrycznej intuicji. Nie lekceważ znaczenia prostych operacji na wektorach, ponieważ to, czego nauczyłeś się w tym rozdziale, będzie stanowić podstawę dla pozostałej części tej książki oraz reszty Twojej kariery *specjalisty w dziedzinie stosowanej algebry liniowej* (którym jesteś, jeśli robisz cokolwiek, co jest związane z nauką o danych, uczeniem maszynowym, sztuczną inteligencją, głębokim uczeniem, przetwarzaniem obrazu, wizją komputerową, statystyką i tak dalej).

Oto najważniejsze przesłania tego rozdziału:

- Wektor to uporządkowana lista liczb umieszczonych w kolumnie lub w rzędzie. Liczbę elementów wektora nazywamy jego wymiarowością. Wektor można przedstawić w postaci odcinka w przestrzeni geometrycznej o liczbie osi równej wymiarowości wektora.
- Kilka operacji arytmetycznych na wektorach (dodawanie, odejmowanie i iloczyn Hadamarda) wykonuje się na odpowiadających sobie elementach.
- Iloczyn skalarny to pojedyncza liczba, która reprezentuje związek między dwoma wektorami o tej samej wymiarowości. Wartość iloczynu skalarnego to suma iloczynów odpowiadających sobie elementów z dwóch wektorów.
- Iloczyn skalarny ortogonalnych wektorów to zero. Z geometrycznego punktu widzenia oznacza, że wektory te są do siebie prostopadłe.
- Ortogonalny rozkład wektora polega na przedstawieniu wektora w postaci sumy dwóch innych wektorów, które są ortogonalne i równoległe do wektora referencyjnego. Wzór tego rozkładu można wyprowadzić z geometrii, ale należy pamiętać, że wyraża on koncepcję rzutu prostokątnego (ortogonalnego).

## Ćwiczenia z programowania

Mam nadzieję, że nie będziesz traktować poniższych ćwiczeń jako żmudnej pracy, którą musisz wykonać. Ćwiczenia te są bowiem okazją do szlifowania umiejętności matematycznych i programistycznych oraz sprawdzenia, czy naprawdę rozumiesz materiał z tego rozdziału.

Potraktuj te ćwiczenia również jako trampolinę do dalszego poznawania świata algebry liniowej przy użyciu Pythona. Zmodyfikuj kod tak, aby używał innych liczb, innej liczby wymiarów, różnych orientacji itp. Stwórz własny kod, aby przetestować inne koncepcje przedstawione w tym rozdziale. Co najważniejsze: baw się dobrze i ucz się, bawiąc.

Dla przypomnienia: rozwiązania do wszystkich ćwiczeń znajdziesz pod adresem <https://ftp.helion.pl/przyklady/pralli.zip>.

### Ćwiczenie 2.1

W zbiorze kodów „brakuje” kodu odpowiedzialnego za utworzenie rysunku 2.2. (Tak naprawdę go nie brakuje — przenieśliśmy go do rozwiązania w tym ćwiczeniu). Twoim celem jest więc napisanie kodu, który wygeneruje rysunek 2.2.

### Ćwiczenie 2.2

Napisz algorytm, który oblicza normę wektora, tzn. zaimplementuj równanie 2.7 w kodzie. Sprawdź poprawność rozwiązania, używając losowych wektorów o różnych wymiarach i orientacjach. Upewnij się, że wartość zwracana przez Twój kod jest taka sama jak wartość zwracana przez np. `linalg.norm()`. Celem tego ćwiczenia jest doskonalenie umiejętności związanych z indeksowaniem tablic NumPy i tłumaczeniem wzorów na kod. W praktyce łatwiej jest użyć np. `linalg.norm()`.

### Ćwiczenie 2.3

Utwórz funkcję, która przyjmuje wektor i zwraca wektor jednostkowy o tym samym kierunku. Co się stanie, gdy przekażesz jej wektor zerowy?

### Ćwiczenie 2.4

Wiesz już, jak tworzy się wektory jednostkowe. Co zrobić, aby utworzyć wektor o dowolnej zadanej długości geometrycznej? Utwórz w Pythonie funkcję, która przyjmuje wektor i żądaną długość geometryczną oraz zwraca wektor o tym samym kierunku, którego długość odpowiada drugiemu parametrowi funkcji.

### Ćwiczenie 2.5

Utwórz pętlę `for`, która zamienia wektor wierszowy w wektor kolumnowy bez użycia wbudowanych w Pythona funkcji/metod, takich jak np. `transpose()` lub `v.T`. To ćwiczenie pomoże Ci tworzyć i indeksować zorientowane wektory.

### Ćwiczenie 2.6

Oto interesujący fakt: kwadrat normy wektora to iloczyn skalarny tego wektora i jego samego. Aby się o tym przekonać, przeanalizuj raz jeszcze równanie 2.8. Następnie potwierdź tę prawidłowość za pomocą Pythona.

### Ćwiczenie 2.7

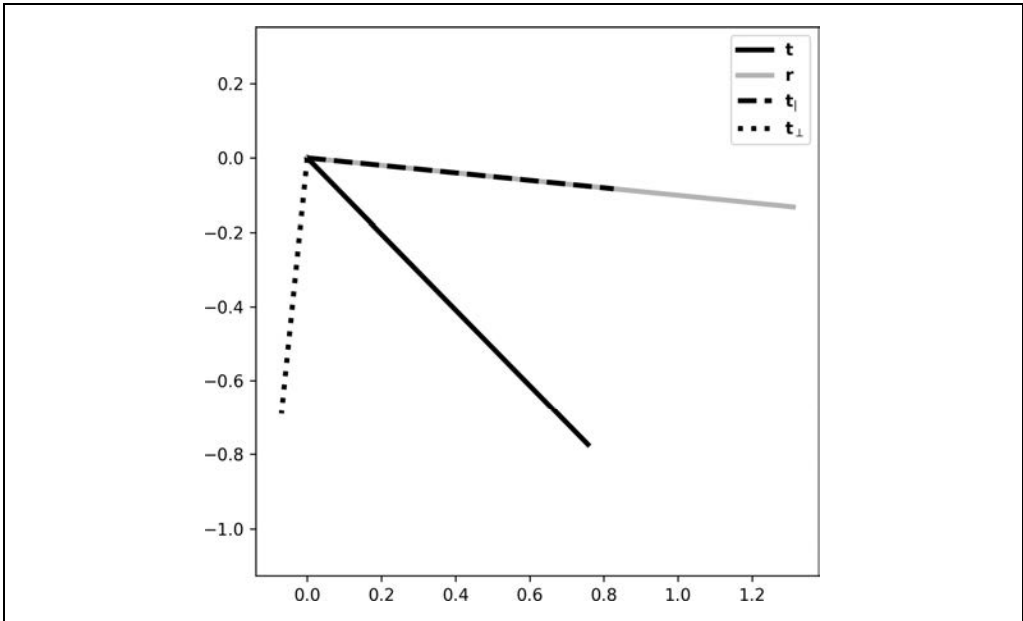
Utwórz kod, który zademonstruje *przemienność* iloczynu skalarnego. Przemienność oznacza, że  $a \cdot b = b \cdot a$ , co w przypadku iloczynu skalarnego oznacza, że  $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ . Po sprawdzeniu prawdziwości tej własności w kodzie przeanalizuj równanie 2.9, aby zrozumieć, dlaczego iloczyn skalarny jest przemienny.

### Ćwiczenie 2.8

Utwórz kod, który wygeneruje rysunek 2.6. (O ile znajdują się na nim wszystkie kluczowe elementy, rysunek generowany przez Twoje rozwiązanie nie musi wyglądać *dokładnie* tak jak rysunek 2.6).

### Ćwiczenie 2.9

Zaimplementuj ortogonalny rozkład wektora. Zacznij od dwóch wektorów liczb losowych  $\mathbf{t}$  i  $\mathbf{r}$  i spróbuj odtworzyć treść rysunku 2.8 (ze względu na liczby losowe Twój wykres będzie wyglądał nieco inaczej). Następnie potwierdź, że obie składowe sumują się do  $\mathbf{t}$  oraz że  $\mathbf{t}_{\perp\mathbf{r}}$  i  $\mathbf{t}_{\parallel\mathbf{r}}$  są względem siebie ortogonalne.



Rysunek 2.8. Ćwiczenie 2.9

### Ćwiczenie 2.10

Ważną umiejętnością programisty jest umiejętność radzenia sobie z błędami. Załóżmy, że w Twoim kodzie znajduje się błąd polegający na tym, że w mianowniku ułamka z równania 2.13 znalazło się  $\mathbf{t}^T \mathbf{t}$  zamiast  $\mathbf{r}^T \mathbf{r}$  (łatwo popełnić tego rodzaju błąd i mówię to z własnego doświadczenia zdobytego podczas pisania tego rozdziału!). Zaimplementuj kod zawierający ten błąd i sprawdź, czy wynik obliczony przy jego użyciu różni się od poprawnego. Co możesz zrobić, aby sprawdzić, czy wynik jest poprawny? (W programowaniu porównywanie wartości z własnego kodu ze znanymi wynikami nazywamy **sprawdzaniem poprawności** (ang. *sanity-checking*)).



## A

algebra liniowa, 13  
algorytm  
  analizy głównych składowych, 239  
  Gram-Schmidta, 143, 146  
  k-średnich, 57, 60  
analiza  
  głównych składowych, PCA, 201, 236, 244  
  rozkład według wartości osobliwych, 239  
  liniowa dyskryminacyjna, LDA, 240, 244, 248  
aproksymacja macierzami niskiego rzędu, 227,  
  242, 244, 252  
atrybut shape, 21

## B

baza, 48, 51, 52  
  standardowa, 49  
biblioteka  
  Matplotlib, 64, 268  
  NumPy, 64, 267  
  Pandas, 182  
  SciPy, 61, 160  
  statsmodels, 186  
broadcasting, 27

## C

centroid, 58

## D

diagonała, 67  
diagonalizacja  
  jednoczesna dwóch macierzy, 216  
  macierzy, 217  
  macierzy kwadratowej, 207

długość geometryczna, 28  
dodawanie  
  macierzy, 68, 95  
  wektorów, 22, 24  
  wektorów i skalarów, 25  
dopasowywanie ogólnego modelu liniowego, 167  
dowód matematyczny, 16  
dźwignia, leverage, 179

## E

eliminacja  
  Gausa, 156  
  Gausa-Jordana, 157, 158

## F

filtrowanie, 62  
  obrazu, 116  
  szeregów czasowych, 56  
forma kwadratowa macierzy, 212  
f-stringi, 273  
funkcja sigmoidalna, 272  
funkcje, 264–266

## G

geometryczna interpretacja  
  iloczynu skalarnego, 31  
  odwrotności, 135  
  wektorów, 21  
  wektorów własnych, 200  
GitHub, 260  
Google Colab, 260

## H

hiperparametry, 193

## I

IDE, 259

iloczyn

  Hadamarda, 33, 69

  mieszany, 34

  skalarny, 29, 31, 75

    geometryczna interpretacja, 31

    wektorów ortogonalnych, 32

  wektorowy, 34

  zewnątrzny, 33, 75, 232

implementacja analizy głównych składowych,  
  247

indeksowanie, 30, 64, 263, 267

iteracja, 277

## J

jądro

  Gausa, 116

  lewostronne, 91

  macierzy, 104

## K

kąt pochylenia wektora, 21

kernel, 279

klasteryzacja, 57

kod, 16

kombinacja liniowa, 42

komentarze, 264

kompresja

  danych, 202

  obrazów, 243

konwolucja, 116

korelacja, 54, 56, 60

kowariancja, 109, 242

kształt, shape, 117

## L

LDA, linear discriminant analysis, 240

## M

macierz, 64

  diagonalna, 67, 93

  dodatnio (pół)określona, 215, 217

  dołączona, 129

  dopełnień algebraicznych, 129

  Hilberta, 134

  jednostkowa, 67, 93

  korelacji, 183

  kowariancji danych, 109, 111

  kwadratowa, 67, 199

    diagonalizacja, 207

    określoność, 214

  liczb losowych, 66, 143

  minorów, 128

  nieodwracalna, 125

  niesymetryczna, 76

  niskiego rzędu, 242, 244, 252

  obrotu, 112

  ortogonalna, 112, 140, 146

  osobliwa, 125

    rozkład, 211

  permutacji, 160

  prostokątna, 67

  schodkowa, 151, 155

  schodkowa zredukowana, 157

  skalarna, 203

  specjalna, 66

  symetryczna, 75, 76, 208

  szeroka, 67

  trójkątna, 67, 94

  trójkątna górna, 145

  wysoka, 67

  zależności, 98, 184, 189

  zerowa, 67, 93

  źle uwarunkowana, 230

macierze

  znajdowanie wartości własnych, 203

  znajdowanie wektorów własnych, 205

metoda najmniejszych kwadratów, 168–170, 177,  
  181

metody, 265

mnożenie

  macierzy, 71, 95

  przez skalar, 69

  przez wektor, 72, 112, 204

  standardowe, 70

wektorów, 32  
przez skalar, 24, 26  
moduł wektora, 21, 28

## N

niezależność liniowa, 43  
zbioru wektorów, 98  
norma  
Frobeniusa, 83, 84, 103  
macierzowa, 82, 103  
wektorowa, 28, 238  
normalizacja, 54

## O

obliczanie  
odwrotności, 125, 145  
stabilność numeryczna, 133  
wyznacznika, 100  
odbicie Householdera, 147  
odejmowanie  
macierzy, 68  
wektorów, 24  
odległość euklidesowa, 58  
odwrotność macierzy, 124, 158, *Patrz także*  
pseudoodwrotność  
 $2 \times 2$ , 126  
diagonalnej, 128  
geometryczna interpretacja, 135  
jednostronna, 125, 129  
kwadratowej, 128  
lewostronna, 131, 168  
pełna, 125  
unikalność, 132  
ogólny model liniowy, 166, 170, 172, 177  
określoność macierzy, 214, 217  
operacja transpozycji, 20, 27  
operacje  
na macierzach, 74, 75  
na wektorach, 22  
normalizacji, 54  
operatory porównania, 275  
orientacja wektora, 20  
ortogonalizacja Grama-Schmidta, 142  
ortogonalne wektory własne, 208  
ortogonalność kolumn, 140  
ortogonalny rozkład wektora, 34

## P

PCA, principal component analysis, 236  
pivot, 155  
podobieństwo cosinusowe, 54–56  
podprzestrzeń, 46, 48, 52  
wektorowa, 46  
podstawianie wsteczne, 157  
procedura Grama-Schmidta, 142, 146, 147  
przekątna macierzy, 67  
przekształcanie macierzy, 160  
przestrzeń macierzy, 103  
jądro, 104  
jądro lewostronne, 91  
kolumnowa, 84  
wierszowa, 88  
przesuwanie macierzy, 68, 95  
kwadratowej, 104  
przeszukiwanie siatki, grid search, 191, 194, 198  
pseudoodwrotność, 125  
Moore'a-Penrose'a, 132, 231, 232  
punkt przecięcia, 167  
Python, 258  
biblioteki, 266  
formatowanie wyjścia, 273  
funkcje, 264–266  
indeksowanie, 263, 267  
instrukcje zagnieżdżone, 277  
komentarze, 264  
komunikat o błędzie, 262, 265, 271  
metody, 265  
NumPy, 267  
operator modulo, 278  
operatory porównania, 275  
pętle, 277  
pomiar czasu obliczeń, 278  
przepływ sterowania, 274  
słowa kluczowe, 265, 266, 275–277  
typy danych, 262  
wizualizacje, 268  
zmiennie, 261

## R

redukcja  
szumów, 201  
wymiarowości, 202

regresja  
  grzbietowa, 83  
  lasso, 83  
  wielomianowa, 188, 197  
regularyzacja, 187, 194, 196  
rozdzielność względem dodawania, 31  
rozkład  
  ekonomiczny, 144  
  LU, 151, 160–162  
  macierzy kwadratowej, 203  
  macierzy osobliwych, 211  
  pełny, 144  
  QR, 142, 145, 176  
  według wartości osobliwych, SVD, 223–228,  
  231, 232, 236, 242, 252, 255  
  analiza głównych składowych, 239  
  według wartości własnych, 199, 211, 216, 217,  
  228, 236, 244  
  wektora, 34  
rozpinanie, 46, 48  
rozszerzanie macierzy, 97  
rozwiązanie  
  minimalizujące normę, 187  
  trywialne, 25  
rozwiązywanie  
  problemu najmniejszych kwadratów, 176  
  układów równań, 152, 154, 162  
równania macierzowe, 153  
równanie własne, 201  
różnica dwóch wektorów, 24  
rzęd  
  macierzy, 91, 95, 104, 225, 232  
  macierzy specjalnych, 93  
rzut ortogonalny, 36

## S

skalar, 24, 26  
sklearn, 247  
slicing, 64, 267  
słowo kluczowe  
  def, 265  
  elif, 276  
  else, 276  
  if, 275  
  return, 266  
solver najmniejszych kwadratów, 168  
sprawdzanie poprawności, sanity-checking, 40

sprowadzanie do postaci schodkowej, 154, 162  
stała, 152, 167  
statystyka, 201  
suma  
  dwóch wektorów, 24  
  kwadratów błędów, 174  
SVD, singular value decomposition, 223  
symbol  $\mathbb{R}$ , 19  
szeregi czasowe, 56  
szerokość, width, 117  
szum, 201, 243, 255

## Ś

śląd macierzy, 84, 103

## T

tabela regresji, 186  
tablica, 21  
tensor, 118  
transpozycja  
  macierzy, 74, 110  
  wektorów, 20, 26  
tworzenie  
  funkcji, 265  
  macierzy, 64  
  macierzy symetrycznych, 76  
  ogólnego modelu liniowego, 166  
  wektora, 19, 21  
  wektora jednostkowego, 28  
typy danych, 262

## U

uchwyt, handle, 114  
układy równań, 151, 154, 162  
unikalność odwrotności, 132  
usuwanie szumów, 243, 255  
uśrednianie wektorów, 26

## W

wariancja, 229  
wartości  
  odstające, outliers, 179  
  osobliwe, 96, 223–228, 231  
  zamiana na wariancję, 229  
  własne, 199, 212, 228

ważona kombinacja liniowa, 42, 51, 52, 72  
wektor, 19  
    bazowy, 206  
    geometryczna interpretacja, 21  
    jednostkowy, 28, 29, 90  
    kolumnowy, 19  
    wierszowy, 19  
    zerowy, 25, 45  
wektory własne, 200  
    ortogonalne, 208  
    rzeczywiste, 210  
    skala nieokreśloności, 206  
    znajdowanie, 203, 205  
    znak, 206  
wielomian charakterystyczny, 101–104, 204, 217  
wizualizacja, 268  
    macierzy, 64  
    metody najmniejszych kwadratów, 172  
    rozkładu LU, 161  
    wektorów, 19  
wizualna kontrola danych, 193  
współczynnik  
    korelacji, 54  
    korelacji Pearsona, 31, 54  
    uwarunkowania macierzy, 134, 230  
współliniowość, 187, 195  
wybielanie, whitening, 221  
wykres osypiska, 201  
wykrywanie cech, 56, 62  
    na obrazie, 115, 122  
wymiarowość, 20  
wymiarzy  $Q$  i  $R$ , 144  
wyraz wolny, 152, 167  
wyśrodkowanie zmiennej, 54  
wyznacznik  
    macierzy, 99, 104  
    macierzy osobliwej, 101

## Z

zależność liniowa, 101  
zastosowania  
    macierzy, 109  
    metody najmniejszych kwadratów, 181  
    rozkładu  
        według wartości osobliwych, 236, 243, 255  
        według wartości własnych, 236  
    rzędów macierzy, 97  
    wektorów, 54  
zbiory niezależne, 44  
zbiór  
    rozpinany, 46  
    testowy, 250  
    wektorów, 41, 52  
zintegrowane środowisko programistyczne, IDE,  
    259  
zmiennie  
    niezależne, 166  
    zależne, 166  
znajdowanie  
    wartości własnych, 203  
    wektorów własnych, 205



# PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

**Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!**

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA  
**Helion** 

## Ta książka świetnie wyjaśnia przydatność algebry liniowej i przedstawia wiele jej praktycznych zastosowań

Thomas Nield, autor książek *Podstawy matematyki w data science* i *Pierwsze kroki z SQL*

Pozornie nie dzieje się nic złego, jeśli inżynier lub analityk danych nie rozumie algebry liniowej. Może korzystać z już istniejących narzędzi i nie przejmować się szczegółami ich implementacji. Warto jednak dokładnie poznać algorytmy używane w nauce o danych i dostosować do swoich potrzeb istniejące metody obliczeniowe, tutaj więc nowoczesna algebra liniowa okazuje się nieodzowna. Jeśli chcesz ją poznać w nowoczesnej, praktycznej formie, najlepiej posłużyć się kodem i zastosowaniem algebry liniowej w analizie danych czy symulacjach numerycznych.

To książka przeznaczona dla osób, które pracują ze zbiorami danych. Jest praktycznym przewodnikiem po koncepcjach algebry liniowej, pomyślanym tak, by ułatwić ich zrozumienie i zastosowanie w użytecznych obliczeniach. Poszczególne zagadnienia przedstawiono za pomocą kodu Pythona, wraz z przykładami ich wykorzystania w nauce o danych, uczeniu maszynowym, uczeniu głębokim, symulacjach i przetwarzaniu danych biomedycznych. Dzięki temu podręcznikowi nauczysz się rachunku macierzowego, poznasz metody rozkładu macierzy LU i QR, a także rozkład według wartości osobliwych. Zapoznasz się też z takimi zagadnieniami jak metoda najmniejszych kwadratów i analiza składowych głównych.

### W książce między innymi:

- interpretacja i zastosowania wektorów i macierzy
- rachunek macierzowy
- pojęcie zależności liniowej, rzędu macierzy i macierzy pseudoodwrotnej
- metody rozkładu macierzy (w tym rozkłady LU i QR)
- wyznaczanie wartości własnych, wektorów własnych i wartości osobliwych
- zastosowania algebry liniowej, w tym metoda najmniejszych kwadratów i analiza składowych głównych

**Mike X Cohen** jest profesorem nadzwyczajnym neuronauki w Instytucie Donders Centrum Medycznego Uniwersytetu im. Radbouda w Nijmegen w Holandii. Od ponad dwudziestu lat uczy programowania, analizy danych, statystyki i powiązanych z nimi zagadnień, jest też autorem wielu podręczników.

**Helion**  **KOD KORZYŚCI**  
Sięgnij po więcej! ▶ 

 **helion.pl**

 **HELION SA**  
ul. Kościuski 1c  
44-100 Gliwice  
tel.: 32 230 98 63  
helion@helion.pl

ISBN 978-83-289-0261-9

 9 788328 902619

**Cena: 77,00 zł**