Dorota Pekasiewicz

Matematyka

Podręcznik dla studentów kierunków ekonomicznych

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

METODY ILOŚCIOWE W EKONOMII, FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Matematyka

Podręcznik dla studentów
kierunków ekonomicznych

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Dorota Pekasiewicz

Matematyka

Podręcznik dla studentów kierunków ekonomicznych

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO
Łódź 2018

METODY ILOŚCIOWE W EKONOMII, FINANSACH I ZARZĄDZANIU

Dorota Pekasiewicz – Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny
Katedra Metod Statystycznych, 90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 41

RECENZENT

Stanisław Wanat

REDAKTOR INICJUJĄCY

Monika Borowczyk

REDAKTOR WYDAWNICTWA UŁ

Katarzyna Gorzkowska

SKŁAD I ŁAMANIE

Munda – Maciej Torz

PROJEKT OKŁADKI

Katarzyna Turkowska

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/exopixel

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.08154.17.0.M

Ark. wyd. 10,0; ark. druk. 20,0

ISBN 978-83-8088-993-4
e-ISBN 978-83-8088-994-1

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

Spis treści

Przedmowa

Metody ilościowe odgrywają istotną rolę w różnego rodzaju badaniach ekonomicznych, społecznych, przyrodniczych czy medycznych. Pozwalają skutecznie rozwiązać wiele problemów i podejmować najbardziej optymalne decyzje, a także wpływają na rozwój różnych dziedzin nauki.

Metody Ilościowe w Ekonomii, Finansach i Zarządzaniu to cykl publikacji zawierający treści programowe z matematyki oraz statystyki obowiązujące studentów kierunków ekonomicznych, jak również przydatne osobom prowadzącym prace naukowe i badawcze.

Cykl ten rozpoczyna *Matematyka*, w której przedstawione są najważniejsze pojęcia z zakresu analizy matematycznej i algebry, które mogą być wykorzystywane w badaniach ekonomicznych.

Książka składa się z ośmiu rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawione są zagadnienia wstępne – elementy logiki i teorii mnogości. Kolejne rozdziały poświęcone są funkcjom jednej zmiennej, w szczególności ciągom liczbowym, rachunkowi różniczkowemu i całkowemu funkcji jednej zmiennej oraz szeregom liczbowym. W rozdziale szóstym i siódmym ujęto najważniejsze zagadnienia dotyczące rachunku macierzowego i metod rozwiązywania układów równań liniowych. Ostatni rozdział zawiera wiadomości związane z funkcjami wielu zmiennych, ze szczególnym uwzględnieniem funkcji dwóch zmiennych.

Oprócz rozważań teoretycznych książka zawiera przykłady o charakterze matematycznym, mające na celu przybliżenie opisywanych problemów i wskazanie metod ich rozwiązania, a także przykłady prezentujące zastosowanie ekonomiczne rozważanych pojęć. W każdym rozdziale, oprócz pierwszego, znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązania i pytania testowe, do których podane są odpowiedzi. Wydaje się, że taki układ publikacji będzie pomocny studentom w uczeniu się matematyki na różnych kierunkach studiów, o zróżnicowanym stopniu zaawansowania wymagań matematycznych.

Autorka

ROZDZIAŁ 1

Zagadnienia wstępne

1.1. Elementy logiki

Podstawowymi pojęciami logiki są: zdanie, forma zdaniowa, funkcja zdaniowa i kwantyfikatory.

Zdaniem nazywamy każde wyrażenie, któremu można przypisać jedną z ocen: prawdę lub fałsz. Prawda i fałsz to **wartości logiczne zdania**.

Zdania oznaczamy zwykle małymi literami, np. p, q, zaś wartość logiczną zdania – symbolem „1”, gdy jest ono prawdziwe oraz symbolem „0”, gdy jest fałszywe.

Wśród zdań wyróżniamy **zdania proste** i **złożone**. Zdania złożone składają się ze zdań prostych połączonych **funktorami zdaniotwórczymi** (**spójnikami zdaniowymi**).

Do najczęściej stosowanych funktorów zdaniotwórczych należą:

— negacja ($\sim$),
— alternatywa ($\vee$),
— koniunkcja ($\wedge$),
— implikacja ($\Rightarrow$),
— równoważność ($\Leftrightarrow$).

Negacją zdania p nazywamy zdanie „nieprawda, że p” i oznaczamy $\sim p$. **Alternatywą** nazywamy zdanie „p lub q” i oznaczamy $p \vee q$, zaś **koniunkcją** – zdanie „p i q”, które oznaczamy $p \wedge q$. **Implikacją** nazywamy zdanie „jeżeli p, to q” i zapisujemy $p \Rightarrow q$, natomiast **równoważnością** – zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q” i zapisujemy $p \Leftrightarrow q$.

Przykładem zdania prostego fałszywego (o wartości logicznej 0) jest „liczba $\sqrt[3]{8}$ jest niewymierna", natomiast zdanie proste prawdziwe (o wartości logicznej 1) to „romb jest trapezem".

Wartości logiczne zdań złożonych, w zależności od wartości logicznych zdań prostych wchodzących w skład rozpatrywanego zdania przedstawione są w tab. 1.

Tablica 1. Wartości logiczne negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Zdanie typu „liczba pierwsza jest podzielna przez 1 i przez samą siebie" jest koniunkcją i jest zdaniem złożonym prawdziwym.

Zdanie prawdziwe nazywamy **tautologią**. Do ważniejszych tautologii należą zdania:

1) $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ (prawo podwójnego przeczenia),
2) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (prawo de Morgana),
3) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (prawo de Morgana),
4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (prawo transpozycji),
5) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ (prawo implikacji),
6) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ (reguła odrywania),
7) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$, (zaprzeczenie implikacji),
8) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

Przykłady innych tautologii można znaleźć m.in. w podręczniku: Abtowa, Piasecki, Różański, Świtalski (2000).

Sprawdzenie prawdziwości zdań związane jest z rozważeniem wszystkich możliwych wariantów wartości logicznych zdań p i q.

Przykład 1.1.

Prawdziwość praw de Morgana jest uzasadniona następująco:

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Ostatnie kolumny w tablicach świadczą o prawdziwości rozważanych zdań bez względu na wartości logiczne zdań p i q, zatem są tautologiami.

Wyrażenie, któremu nie można przypisać wartości logicznej nazywamy **formą zdaniową**.

Formą zdaniową jest **funkcja zdaniowa**, czyli wyrażenie zawierające zmienne. Funkcja zdaniowa staje się zdaniem, jeśli za zmienne podstawimy konkretne wielkości z jej zakresu zmienności (dziedziny).

Przykład 1.2.

Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in R$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych R. Dla $x \in \{-2, 2\}$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \notin \{-2, 2\}$ – wartość logiczną 0.

Przykład 1.3.

Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in N$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych N. Dla $x = 2$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \in N \setminus \{2\}$ – wartość logiczną 0.

W zapisie funkcji zdaniowych wykorzystuje się symbole zwane **kwantyfikatorami**. Wyróżniamy:

— **kwantyfikator ogólny** (duży): $\forall$ – „dla każdego…",

— **kwantyfikator szczegółowy** (mały): $\exists$ – „istnieje…".

Kwantyfikatory umożliwiają skrócenie zapisu funkcji zdaniowych. Na przykład funkcję zdaniową „liczba naturalna n jest liczbą parzystą" można zapisać za pomocą kwantyfikatorów w postaci: $\underset{k\in N}{\exists} \quad n=2k.$

Kwantyfikatory znajdują zastosowanie w zapisach definicji i twierdzeń matematycznych.

Rachunek kwantyfikatorów charakteryzuje się następującymi własnościami:

1) $\sim\left(\underset{x\in X}{\exists} p(x)\right) \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\forall}\left(\sim p(x)\right)$ (prawo de Morgana),

2) $\sim\left(\underset{x\in X}{\forall} p(x)\right) \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\exists}\left(\sim p(x)\right)$ (prawo de Morgana),

3) $\underset{x\in X}{\exists}\left(p(x)\vee q(x)\right)\Leftrightarrow \underset{x\in X}{\exists} p(x)\vee \underset{x\in X}{\exists} q(x)$,

4) $\underset{x\in X}{\exists}\left(p(x)\wedge q(x)\right)\Rightarrow \underset{x\in X}{\exists} p(x)\wedge \underset{x\in X}{\exists} q(x)$,

5) $\underset{x\in X}{\forall}\left(p(x)\wedge q(x)\right)\Leftrightarrow \underset{x\in X}{\forall} p(x) \wedge \underset{x\in X}{\forall} q(x)$,

6) $\left(\underset{x\in X}{\forall} p(x)\right) \vee\left(\underset{x\in X}{\forall} q(x)\right) \Rightarrow \underset{x\in X}{\forall}\left(p(x)\vee q(x)\right)$,

7) $\underset{x\in X}{\forall}\left(p(x)\Rightarrow q(x)\right)\Rightarrow\left(\underset{x\in X}{\forall} p(x) \Rightarrow \underset{x\in X}{\forall} q(x)\right)$,

gdzie p i q są funkcjami zdaniowymi zmiennej x o zakresie zmienności $X\neq\emptyset$.

1.2. Elementy teorii mnogości

Teoria mnogości jest działem matematyki zajmującym się badaniem własności zbiorów.

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, niedefiniowanym. Zbiory oznaczamy dużymi literami (np. A, B, C, …), zaś elementy należące do zbiorów – małymi literami: a, b, …

Zbiory przedstawiamy, wypisując ich elementy, np. $\{2, 4, 6, 8\}$ albo podając funkcję zdaniową, którą muszą spełniać ich elementy, np. $\{x \in R: x^2 - 1 < 0\}$.

Pewnym zbiorom przypisane są standardowe oznaczenia:
N – zbiór liczb naturalnych, czyli zbiór $\{0, 1, 2, ...\}$,
N^+ – zbiór liczb naturalnych dodatnich, czyli zbiór $\{1, 2, ...\}$,
C – zbiór liczb całkowitych,
W – zbiór liczb wymiernych,
NW – zbiór liczb niewymiernych,
R – zbiór liczb rzeczywistych,
R^+ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,
R^- – zbiór liczb rzeczywistych ujemnych.

Określenie zbiór liczb naturalnych dotyczyć może zbioru $\{1, 2, ...\}$ (por. Piszczała, 2000).

Liczbę elementów zbioru A nazywamy **liczebnością** lub **licznością** zbioru i oznaczamy $n(A)$.

Zbiory o tej samej liczebności nazywamy **równolicznymi** lub zbiorami o tej samej **mocy**.

Zbiory skończone (o skończonej liczbie elementów) lub równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych (nieskończone, których elementy da się uporządkować) nazywamy **przeliczalnymi**. Zbiory niebędące przeliczalnymi nazywane są **nieprzeliczalnymi**. Zbiorami nieprzeliczalnymi są m.in. zbiór liczb rzeczywistych, zbiór liczb niewymiernych.

Zbiór liczbowy może być **ograniczony** lub **nieograniczony**.

Zbiorami ograniczonymi są przedziały liczbowe postaci:
$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$, $\langle a, b\rangle = \{x \in R: a \le x \le b\}$, $(a, b\rangle = \{x \in R: a < x \le b\}$, $\langle a, b) = \{x \in R: a \le x < b\}$, zaś przedziały $(a, \infty) = \{x \in R: x > a\}$, $\langle a, \infty) = \{x \in R: x \ge a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in R: x < b\}$, $(-\infty, b\rangle = \{x \in R: x \le b\}$ są zbiorami nieograniczonymi (a, b to ustalone liczby rzeczywiste).

Dla ograniczonego zbioru liczbowego A określamy kres dolny i kres górny zbioru.

Kresem dolnym (**infimum**) ograniczonego zbioru A nazywamy największą liczbę ograniczającą ten zbiór z dołu i oznaczamy $\inf A$.