DO NOWEJ PODSTAWY PROGRAMOWEJ

Klasa 1

PODRĘCZNIK dla szkół ponadgimnazjalnych

Matematyka Europejczyka

Zakres podstawowy i **rozszerzony**

Katarzyna Nowoświat
Artur Nowoświat

Helion EDUKACJA

Redaktor prowadzący: Marcin Borecki

Projekt okładki: Urszula Buczkowska

Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą iStockPhoto Inc.

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
WWW: http://helion.pl (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
http://helion.pl/user/opinie?ppodg1
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-2400-3

Printed in Poland.

Spis treści

4. FUNKCJA KWADRATOWA

Inny typ wzrostu niż ax występuje na przykład wówczas, gdy zmieniamy odległość między rzutnikiem a ekranem. Jeśli odległość podwoimy, to obraz (pole) zwiększy się czterokrotnie, a jeśli odległość potroimy, to obraz (pole) zwiększy się dziewięciokrotnie, jeśli z kolei odległość zwiększymy x razy, to obraz zwiększy się x^2 razy. Funkcję postaci $y=x^2$ nazywamy funkcją kwadratową.

Funkcja kwadratowa, podobnie jak funkcja liniowa, służy do zobrazowania wielu zjawisk fizycznych i modelowania w technice.

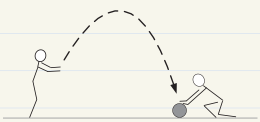
Opisuje ona na przykład zależność wysokości, na jakiej znajduje się ciało, od czasu w rzucie pionowym do góry lub tor lotu ciała w rzucie poziomym.

Parabola

Parabole często spotykamy w życiu codziennym. Wykresem funkcji postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, *b* i *c* są stałymi jest parabola. Należy pamiętać, że nie każda parabola jest wykresem funkcji kwadratowej. Definiując parabolę możemy napisać, że jest to figura przystająca do wykresu funkcji ax^2 dla $a \neq 0$.

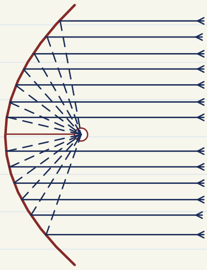
Przykłady:

1. Tor rzutu



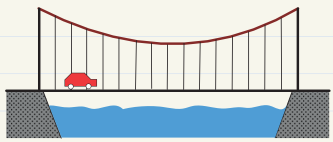
Gdy rzucamy jakimś przedmiotem, porusza się on po paraboli (co prawda opór powietrza trochę tę krzywą zniekształca) — w ten sposób powstaje krzywa balistyczna.

2. Anteny satelitarne



Przekrojem każdej anteny satelitarnej jest parabola. Sygnał jest odbijany od wewnętrznej części parabolicznego talerza i skupiany w głowicy umieszczonej w ognisku paraboli.

3. Mosty



Gdy lina podtrzymująca most ma kształt paraboli, to naprężenie odcinków łączących linę z mostem jest prawie jednakowe. Zapobiega to odkształceniu samego mostu.

Definicja

Funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a \neq 0$ nazywamy funkcją kwadratową lub inaczej trójmianem kwadratowym.

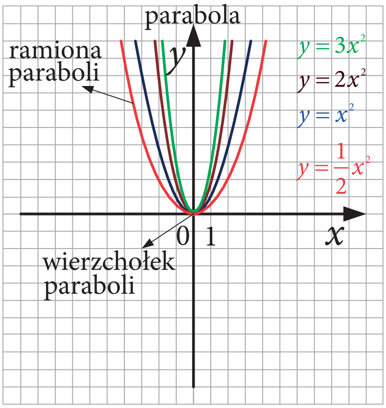
4.1. Wykres funkcji y = ax²

Przykład 1.

Naszkicujmy wykresy funkcji postaci $y = ax^2$ dla $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$. W tym celu sporządzimy tabelkę wartości funkcji.

x	…	–3	–2	–1	0	1	2	3	…
$3x^2$		27	12	3	0	3	12	27	
$2x^2$		18	8	2	0	2	8	18	
x^2		9	4	1	0	1	4	9	
$\frac{1}{2}x^2$		4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	

Na podstawie wartości z tabelki narysujmy wykres funkcji. Wykresem funkcji jest parabola. Punkt (0,0) zwany jest wierzchołkiem paraboli dzieli tę parabolę na dwie części zwane ramionami paraboli.



Na podstawie wykresów możemy zauważyć pewne **własności** funkcji $y = ax^2$:

1. Ramiona paraboli skierowane są do góry. Ramiona są przystające.
2. Punkt $(0,0)$ jest wierzchołkiem paraboli.
3. Wierzchołek paraboli jest punktem minimum (współrzędna y wierzchołka jest najmniejszą wartością funkcji).
4. Wartości największej brak (nie ma maksimum).
5. Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \neq 0$.
6. W przedziale $(-\infty, 0\rangle$ funkcja maleje, a w przedziale $\langle 0, +\infty)$ funkcja rośnie.
7. Oś Oy jest osią symetrii paraboli.

Ćwiczenie 1.

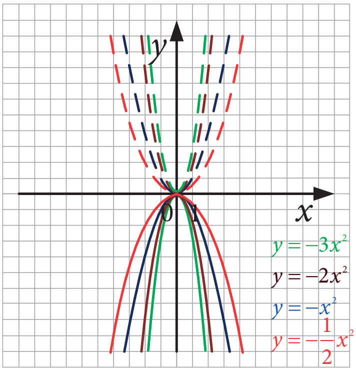
Sporządź tabelkę wartości i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{10}x^2$, $h(x) = 10x^2$.

Przykład 2.

Na podstawie wykresów funkcji z przykładu 1. naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = ax^2$ dla $a < 0$ i $x \in \mathbb{R}$.

Wykresy funkcji postaci $y = ax^2$ dla $a < 0$ ilustrują pewne własności tej funkcji:



1. Ramiona paraboli skierowane są do dołu.
2. Punkt $(0, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli.
3. Wierzchołek paraboli jest punktem maksymalnym (współrzędna y wierzchołka jest największą wartością funkcji).
4. Wartości najmniejszej brak (nie ma minimum).
5. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \neq 0$.
6. W przedziale $(-\infty, 0\rangle$ funkcja rośnie, a w przedziale $\langle 0, +\infty)$ funkcja maleje.
7. Oś Oy jest osią symetrii paraboli.

Ćwiczenie 2.

{ Wskazówka }

Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Sporządź tabelkę wartości i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$f(x) = -x^2,\ g(x) = -\frac{1}{10}x^2,\ h(x) = -10x^2.$

Współczynnik a (znajdujący się przy x^2) decyduje o:

a) skierowaniu ramion — w górę, gdy $a > 0$, oraz w dół, gdy $a < 0$;

b) rozpiętości ramion — im większa wartość liczby $|a|$, tym mniejsze rozchylenie ramion paraboli.

Zadania

1 Mając dane funkcje f, g, napisz wzory określające funkcje: $f \cdot g$, f^2, g^2 oraz narysuj wykres każdej z tych funkcji.

1. $f : x \to 2x \quad g : x \to 3x$
2. $f : x \to -2x \quad g : x \to \frac{1}{2}x$
3. $f(x) = 4x \quad g(x) = \frac{1}{2}x$
4. $f(x) = 5x \quad g(x) = -\frac{1}{5}x$

2 Sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x)=x^2,\ \ x\in\mathbb{N}$ b) $f(x)=x^2,\ \ x\in\mathbb{Z}$ c) $f(x)=x^2,\ \ x\in\mathbb{R}$

3 Który z danych punktów należy do wykresu funkcji $f(x)=2x^2$?

$(1,2)$, $(0,2)$, $(-1,-2)$, $(-1,2)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{18}\right)$

4 Wyznacz brakujące współrzędne punktów, aby punkty te należały do wykresu funkcji $f: x\to\frac{1}{3}x^2$.

$(-1,?)$, $(2,?)$, $(\sqrt{2},?)$, $(?,9)$, $(?,0)$

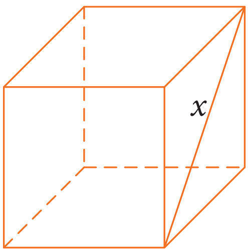
5 Poniżej zamieszczona jest częściowa tabela funkcji $f(x)=ax^2$. Znajdź współczynnik a i uzupełnij tabelę.

x	0	$\frac{1}{2}$	$-0{,}2$	$1\frac{1}{3}$	2		$-1{,}5$	
$f(x)$	0	0,5	0,08			2		0,98

6 Napisz wzór określający funkcję kwadratową, której wykres ma wierzchołek w początku układu współrzędnych, jeśli do wykresu należy też punkt $(3,27)$.

7 Oznacz długość boku kwadratu przez x, a pole tego kwadratu przez y. Napisz wzór określający pole kwadratu jako funkcję długości jego boku. Jaka jest dziedzina tej funkcji?

8 Napisz wzór określający pole powierzchni całkowitej sześcianu jako funkcję przekątnej jego ściany bocznej.

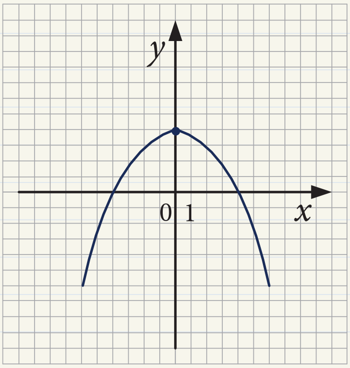


9 Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, którego krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają długości, odpowiednio: $3x$, $3x$, $9x$, opisuje wzór $P(x) = 126x^2$.

10 Napisz wzór określający pole koła jako funkcję jego średnicy i podaj dziedzinę tej funkcji.

4.2. Przesunięcie wykresu funkcji y = ax² wzdłuż osi układu współrzędnych

Jednokierunkowa droga o szerokości 8 m prowadzi przez tunel w Alpach. Tunel ma kształt zbliżony do łuku paraboli o równaniu: $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 6$. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy ciężarówka o szerokości 2,6 m może przejechać tym tunelem, jeżeli najwyższy punkt ciężarówki znajduje się 4 m nad drogą.
Narysujmy przekrój tego tunelu.



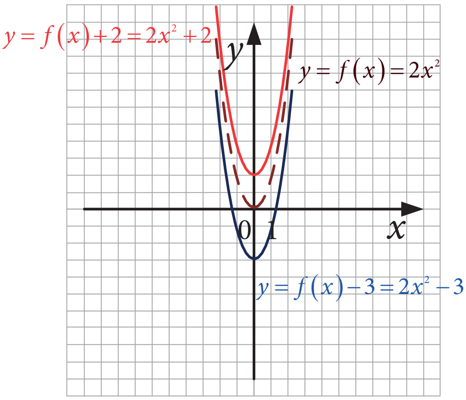
Aby ciężarówka mogła przejechać tunelem, musiałaby jechać środkiem drogi. Ponieważ ciężarówka ma szerokość 2,6 m, więc musimy policzyć wartość funkcji *f* w punkcie, w którym $x = 1{,}3$. A zatem w odległości 1,3 m od środka tunel musi mieć ponad 4 m wysokości.

$f(1{,}3) = -\frac{3}{8} \cdot (1{,}3)^2 + 6 = 5{,}37 > 4$

Odp.: Ciężarówka przejedzie tunelem.

Przykład 1.

Wykres funkcji $y=2x^2+2$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=2x^2$ o 2 jednostki w górę (wzdłuż osi Oy), natomiast wykres funkcji $y=2x^2-3$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=2x^2$ o 3 jednostki w dół (wzdłuż osi Oy).



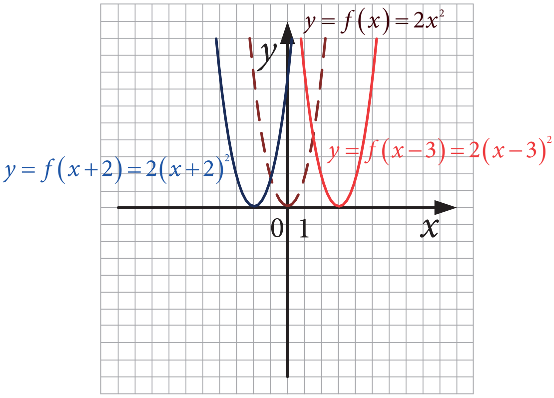
Ćwiczenie 1.

Naszkicuj wykres funkcji $y=\frac{1}{4}x^2$, a następnie wykresy funkcji:

a) $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}$ b) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$ c) $y=\frac{1}{4}x^2-3$ d) $y=-\frac{1}{4}x^2+5$

Przykład 2.

Wykres funkcji $y=2(x-3)^2$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=2x^2$ o 3 jednostki w prawo (wzdłuż osi Ox), natomiast wykres funkcji $y=2(x+2)^2$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=2x^2$ o 2 jednostki w lewo (wzdłuż osi Ox).



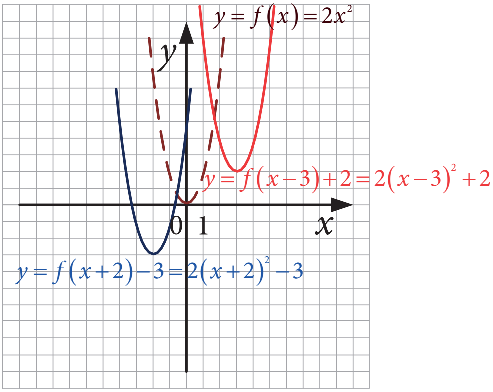
Ćwiczenie 2.

Naszkicuj wykres funkcji $y=\frac{1}{2}x^2$, a następnie wykresy funkcji:

a) $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ c) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$ d) $y=-\frac{1}{2}(x+5)^2$

Przykład 3.

Wykres funkcji $y=2(x-3)^2+2$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=2x^2$ o 3 jednostki w prawo (wzdłuż osi Ox) oraz 2 jednostki w górę (wzdłuż osi Oy), natomiast wykres funkcji $y=2(x+2)^2-3$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=2x^2$ o 2 jednostki w lewo (wzdłuż osi Ox) oraz 3 jednostki w dół (wzdłuż osi Oy).



Ćwiczenie 3.

Naszkicuj wykres funkcji $y=x^2$, a następnie wykresy funkcji:

a) $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$ b) $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$ c) $y=-(x+5)^2-3$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=a(x-p)^2+q$, gdzie $a\neq 0$, jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych (p,q). Osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta $x=p$.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej wygląda następująco:
$f(x)=a(x-p)^2+q$, gdzie $a\neq 0$.

Zadania

1 Narysuj wykres funkcji f i g oraz napisz wzór otrzymanej funkcji g.

a) $f(x)=x^2$, wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo.

b) $f(x)=-x^2$, wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 3 jednostki w prawo.

c) $f(x)=-2x^2$, wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w dół.

d) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 0,5 jednostki w prawo i $\frac{2}{3}$ jednostki w górę.

2 Naszkicuj wykres funkcji f, odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.

a) $f(x)=(x+1)^2-2$ c) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ e) $f(x)=3-2(x-4)^2$

b) $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+4$ d) $f(x)=-2x^2+6$ f) $f(x)=\sqrt{2}(x-4)^2+\sqrt{3}$

3 Poniższa tabela jest częściową tabelą funkcji $f: x \to x^2+b$. Znajdź współczynnik b i wpisz do tabeli brakujące liczby.

x	0	1	2		$\sqrt{3}$		1,5
$f(x)$	-3	-2	1	6		-2	

4 Naszkicuj wykres funkcji f:

a) $f(x)=\left|-x^2\right|$ c) $f(x)=\left|(x-1)^2-2\right|$ e) $f(x)=\left|1-2(x-2)^2\right|$

b) $f(x)=\left|\frac{1}{2}(x-4)^2+4\right|$ d) $f(x)=\left|-x^2+1\frac{1}{2}\right|$ f) $f(x)=\left|(x-4)^2-\sqrt{3}\right|$

5 Podaj przykład funkcji kwadratowej, której zbiorem wartości jest przedział:

a) $\langle 1,+\infty)$ b) $\langle -3,+\infty)$ c) $(-\infty,-3\rangle$ d) $(-\infty,2\rangle$

4.3. Postać ogólna i kanoniczna funkcji kwadratowej

Swobodny spadek przedmiotu oraz rzut pionowy

Załóżmy, że obiekt taki jak piłka został rzucony prosto w górę (lub w dół) albo po prostu spadł z początkowej wysokości s_0.

Jeśli rzucimy obiekt do góry z jakiegoś miejsca o wysokości s_0 nad ziemią, to wysokość $s(t)$, na jakiej znajduje się obiekt w danej chwili, możemy obliczyć z modelu funkcji kwadratowej (w postaci ogólnej): $s(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$,

gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim $\left(9{,}81\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}\right)$, v_0 to prędkość początkowa obiektu (nadana prędkość), a t jest czasem mierzonym w sekundach.

Przykład 1.

Jak naszkicować wykres funkcji o równaniu $y=2x^2-8x+7$?

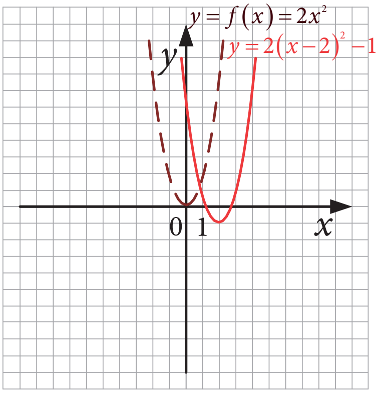
Spróbujmy powyższą postać funkcji przekształcić do znanej nam już postaci:

$y=2x^2-8x+7=2\left(x^2-4x+4-4\right)+7$

$y=2\left(x^2-4x+4\right)-8+7$

$y=2\left(x-2\right)^2-1$

Otrzymaliśmy znaną nam postać kanoniczną funkcji kwadratowej, której wykres przedstawiono na rysunku obok.



CD

Ogólna postać funkcji kwadratowej wygląda następująco: $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$.

Przekształcenie funkcji zapisanej w postaci ogólnej do zapisanej w postaci kanonicznej możemy przeprowadzić następująco:

$f(x)=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\overset{\text{kwadrat } \frac{b}{2a}}{\overset{\downarrow}{\frac{b^2}{4a^2}}}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c \quad \leftarrow \text{Kolorem zaznaczono sumę 0.}$$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c \quad \leftarrow \text{Z rachunku mamy } a\cdot\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)=-\frac{b^2}{4a}.$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Wyrażenie $\Delta=b^2-4ac$ nazywamy wyróżnikiem trójmianu kwadratowego.

Często funkcję kwadratową zapisujemy w postaci kanonicznej: $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$, gdzie $a\neq 0$. Wtedy widoczne są współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji: $\left(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Zatem $p=x_w=\frac{-b}{2a}$, $q=y_w=\frac{-\Delta}{4a}$.

CD

Ćwiczenie 1.

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16$ b) $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{1}{8}$ c) $f(x)=-3(x+4)^2-1$

Ćwiczenie 2.

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{1}{2}$ b) $f(x)=-12x^2+4x-2$

c) $f(x)=0{,}1x^2+0{,}01x-0{,}001$

Zadania

1 Napisz trójmian w postaci ogólnej.

a) $f(x)=(x-4)^2-2$ c) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$

b) $f(x)=2(x+1)^2+\frac{1}{2}$ d) $f(x)=-\sqrt{2}(x+1)^2+\sqrt{3}$

2 Podaj wartości współczynników b i c, gdy każde z poniższych wyrażeń zostanie zapisane w postaci ax^2+bx+c.

a) $(x+1)^2$ b) $(x-4)^2$ c) $(2x+1)^2$ d) $-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$

3 Dla jakich wartości parametru a podane wyrażenia można zapisać w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy?

a) x^2-6x+a e) $x^2+10x+a$ i) $x^2-\frac{1}{4}x+a$

b) x^2+6x+a f) x^2-5x+a j) $x^2+\frac{7}{8}x+a$

c) $x^2+25+ax$ g) $\frac{1}{16}x^2+25+ax$ k) $\frac{16}{25}x^2+\frac{1}{4}+ax$

d) $9x^2+4+ax$ h) $0{,}01x^2+81+ax$ l) $2{,}25x^2+225+ax$

4 Znajdź wartości p, q i a:

a) $2x^2+20x+50=2(x+p)^2$ d) $3x^2-18x+20=3(x+p)^2+q$

b) $2x^2+20x+60=2(x+p)^2+q$ e) $5x^2+12x-6=a(x+p)^2+q$

c) $2x^2+4x-10=2(x+p)^2+q$ f) $3x^2-15x+25=a(x+p)^2+q$

5 Każdy z poniższych trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej

a) $f(x)=x^2-6x+1$ c) $f(x)=x^2-10x+6$ e) $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1$

b) $f(x)=x^2+8x+5$ d) $f(x)=-x^2-4x+3$ f) $f(x)=x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

6 Każdy z poniższych trójmianów przedstaw w postaci kanonicznej

a) $f(x)=2x^2+16x-1$ c) $f(x)=5x^2+10x+6$ e) $f(x)=-2x^2+4x+3$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-4$ d) $f(x)=3x^2+12x-4$ f) $f(x)=\frac{2}{3}x^2+4x-2$

7 Przyjmując kolejno jako $f(x)$:

a) x^2-8x+5, b) x^2-3x, c) $5-6x-9x^2$, d) $2x-3+3x^2$, e) x^2+1+x

(i) napisz funkcję *f* w postaci kanonicznej,
(ii) podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji *f*,
(iii) naszkicuj wykres funkcji *f*,
(iv) napisz równanie osi symetrii.

8 Wyznacz współczynniki *m* i *n* tak, aby do paraboli o równaniu postaci $y=x^2+mx+n$ należały punkty *A* i *B*.

a) $A(1,1)$, $B(0,-5)$ c) $A(\sqrt{2},6)$, $B(3\sqrt{2},18)$

b) $A(3,9)$, $B(-1,9)$ d) $A(1,0)$, $B(2,0)$

W książce R.B. Waya i N.D. Greena *Building with Steel* (*Budowanie mostów ze stali*) zamieszczone są szkice słynnych mostów. Podane tam krzywe przypominają wykresy funkcji kwadratowej.

Wiadukt Langwies w Szwajcarii. Przęsło centralne ze zbrojonego betonu jest podobne do krzywej o równaniu $y=2-\frac{2x^2}{9}$.

Długie przęsło Royal Tweed Bridge w Berwick: $y=1-\frac{2x^2}{37}$ od $x=-4,3$ do $x=4,3$.

Dolna linia bocznego przęsła Tower Bridge: $y=\frac{9x^2}{80}$.

Przęsło mostu Victoria Falls: $y=\frac{116-21x^2}{120}$.

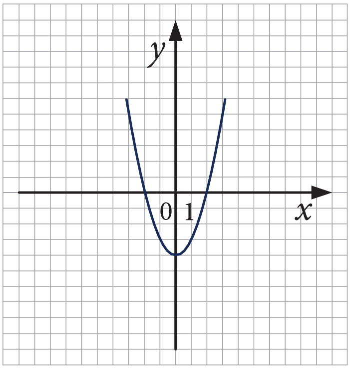
4.4. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Przykład 1.

Na rysunku obok przedstawiamy wykres funkcji $f(x)=x^2-4$.

Stosując wzór skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, możemy uzyskać rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe: $f(x)=(x-2)(x+2)$.

Zatem wykres funkcji $f(x)=x^2-4$ ma wierzchołek w punkcie $(0,-4)$ i przecina oś Ox w punktach o odciętych $x_1=-2$, $x_2=2$.



Postać iloczynowa funkcji kwadratowej wygląda następująco:
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie $a\neq 0$ oraz $\Delta\geq 0$.

Jeżeli $\Delta\geq 0$, to z postaci ogólnej trójmianu kwadratowego można uzyskać rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe.

$$f(x)=ax^2+bx+c=$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Przyjmując $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, otrzymujemy rozkład funkcji kwadratowej na czynniki liniowe $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ i stąd widać, że funkcja kwadratowa ma pierwiastki x_1 i x_2.

CD **Ćwiczenie 1.**

Jeśli to możliwe, przedstaw funkcję kwadratową w postaci iloczynowej.

a) $f(x)=x^2-3x-4$ b) $f(x)=4x^2-12x+9$ c) $f(x)=x^2+4x+8$

1. Jeżeli $\Delta>0$, to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:
$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie $a\neq 0$
i funkcja ma dwa różne miejsca zerowe x_1 i x_2 wyrażone wzorami:
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
Wierzchołek paraboli ma współrzędne $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$.
Wzór na współrzędne wierzchołka paraboli jest prawdziwy dla wszystkich takich x_1 i x_2 (nie muszą to być pierwiastki), dla których $f(x_1)=f(x_2)$.
2. Jeżeli $\Delta=0$, to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:
$f(x)=a(x-x_1)^2$, gdzie $a\neq 0$
i funkcja ma jedno miejsce zerowe x_1 wyrażone wzorem $x_1=\frac{-b}{2a}$.
Wierzchołek paraboli leży na osi Ox i ma współrzędne $(x_1, 0)$.
3. Jeżeli $\Delta<0$, to funkcji kwadratowej nie można przedstawić w postaci iloczynowej i funkcja taka nie ma miejsc zerowych.

{ Uwaga }

Funkcja kwadratowa ma co najwyżej dwa rzeczywiste miejsca zerowe.

Ćwiczenie 2.

Znajdź miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x)=x^2+4x-1$ b) $f(x)=9x^2+30x+25$ c) $f(x)=x^2+5x+10$

Zadania

1 Naszkicuj wykresy funkcji:

a) f: $x\to x^2-9$ b) f: $x\to -x^2+4$ c) f: $x\to x^2$

d) f: $x\to -x^2$ e) f: $x\to x^2+1$

Odczytaj z wykresów miejsca zerowe tych funkcji.

2 Naszkicuj dowolny wykres funkcji kwadratowej, która

a) ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami ujemnymi.
b) ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami o różnych znakach.
c) nie ma miejsc zerowych i każda jej wartość jest liczbą dodatnią.
d) ma dokładnie jedno miejsce zerowe, a jej wartość dla $x=-1$ jest liczbą ujemną.

3 Znajdź miejsca zerowe (o ile istnieją) funkcji kwadratowej i przedstaw ją w postaci iloczynowej (jeśli to możliwe).

a) $f(x)=2x^2$	b) $f(x)=-3x^2$	c) $f(x)=2x^2-3$
d) $f(x)=2x^2+3$	e) $f(x)=-3x^2+5$	f) $f(x)=-3x^2-5$
g) $f(x)=x^2-4x+3$	h) $f(x)=x^2-4x+4$	i) $f(x)=x^2-4x+5$
j) $f(x)=x^2+5x+6$	k) $f(x)=x^2-5x-7$	l) $f(x)=x^2+4x+3$
m) $f(x)=x^2+4x+4$	n) $f(x)=x^2+4x+5$	o) $f(x)=6x^2+5x+1$
p) $f(x)=6x^2-5x+1$	q) $f(x)=-2x^2+x+1$	r) $f(x)=-3x^2+2x+1$
s) $f(x)=9x^2-6x+1$	t) $f(x)=9x^2+6x+1$	u) $f(x)=9x^2-6x+3$
w) $f(x)=9x^2+6x-1$	x) $f(x)=3x^2+6x+9$	y) $f(x)=-2x^2+6x+20$

4.5. Równania kwadratowe

Rozwiązania równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a\neq 0$, to miejsca zerowe funkcji $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.
Aby rozwiązać równanie kwadratowe, przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania i przyrównujemy je do zera.

Równania kwadratowe typu $ax^2+bx+c=0$

Przykład 1.

Rozwiązujemy równanie $2x^2+3x=35$.

$2x^2+3x-35=0$ ← Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania.

$\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot(-35)=9+280=289$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{289}=17$

$x_1=\dfrac{-3-17}{2\cdot 2}=\dfrac{-20}{4}=-5 \qquad x_2=\dfrac{-3+17}{2\cdot 2}=\dfrac{14}{4}=\dfrac{7}{2}$

{ Wskazówka }

Wykonujemy takie same obliczenia jak przy wyznaczaniu miejsc zerowych funkcji: $f(x)=2x^2+3x-35$.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż równania:

a) $6x^2+7x=3$ b) $(x-1)(x-2)=20$ c) $x^2-2\sqrt{2}x-16=0$

Jeżeli w równaniu kwadratowym współczynnik $b=0$ lub $c=0$, to można je rozwiązać szybciej jedną z dwóch poniższych metod, nie obliczając wyróżnika.

{ Wskazówka }

Dla $a, b \in \mathbb{R}$ warunek $a \cdot b = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$ lub $b=0$.

Równania kwadratowe typu $ax^2+bx=0$ dla $a, b \neq 0$

$x(ax+b)=0$ ← Wyciągamy x przed nawias.

$x=0 \quad \vee \quad ax+b=0$ ← Iloczyn dwóch czynników równa się zero, gdy przynajmniej jeden z nich równy jest zero.

$x=0 \quad \vee \quad x=-\dfrac{b}{a}$

Przykład 2.

Rozwiązujemy równanie $2x^2-4x=0$.

$x(2x-4)=0$, stąd $x=0$ lub $2x-4=0$, czyli $x=2$.

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż równania:

a) $x^2-5x=0$ b) $-\dfrac{1}{2}x^2+3x=0$ c) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x=0$

Równania kwadratowe typu $ax^2+c=0$ dla $a\neq 0$ i $c<0$

Równania tego typu rozwiązujemy, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia: $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$.

Przykład 3.

Rozwiązujemy równanie $4x^2-16=0$. Otrzymujemy $x^2-4=0$.

$(x-2)(x+2)=0$, stąd $x-2=0$ lub $x+2=0$, czyli $x=-2$ lub $x=2$.

Ćwiczenie 3.

Rozwiąż równania:

a) $2x^2-16=0$ b) $\dfrac{1}{2}x^2-3=0$ c) $x^2=5$

Przykład 4.

Równanie $4x^2+1=0$ nie ma rozwiązania. Wynika to z faktu, że wyrażenie $4x^2+1>0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Zadania

1 Rozwiąż równania:

a) $x^2=64$ b) $x^2=81$ c) $-x^2+36=0$ d) $x^2-121=0$ e) $x^2-0{,}64=0$

2 Wyznacz te rozwiązania równania, które należą do zbioru liczb naturalnych.

a) $x^2=256$ b) $x^2=1225$ c) $x^2-16=0$ d) $x^2-196=0$

3 Rozwiąż równania:

a) $x^2=7x$ b) $x^2=-14x$ c) $x^2+29x=0$ d) $x^2-17x=0$

4 Rozwiąż równania:

a) $(x-2)^2=4$ b) $\left(x-\sqrt{3}\right)^2=3$ c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ d) $(x-7)^2-64=0$

5 Rozwiąż równania:

a) $x^2-8x+15=0$

b) $x^2-12x+25=0$

c) $\left(3-\sqrt{5}\right)x^2-6x+3+\sqrt{5}=0$

d) $-x^2+7x-12=0$

e) $x^2-2\sqrt{2}x-16=0$

f) $(x-2)(x-3)=6$

g) $\frac{x^2-6}{2}-\frac{x^2-4}{4}=1$

h) $x(x-2)=3(x-2)$

i) $(x-4)^2=(x-4)(2x-1)$

j) $\frac{2}{3}x^2-1{,}6x=1{,}2$

k) $4\left(x^2-1\right)=4x-1$

l) $(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$

m) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$

n) $5x^2=x-1$

o) $x(x-1)=16$

6 Znajdź pierwiastki równania z dokładnością do 0,01.

a) $x^2-5x-5=0$ b) $x^2-5x+1=0$ c) $3x^2-8x+3=0$ d) $3x^2-6x+1=0$

7 Ułóż równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są:

a) 7 i 3 b) 7 i -3 c) -7 i 3 d) -7 i -3

8 Ułóż równanie kwadratowe mające pierwiastki:

a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{9}$ c) $\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$ e) $\frac{1}{a}$ i a

b) $-\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{2}$ d) $2+\sqrt{3}$ i $2-\sqrt{3}$ f) $\frac{a+b}{2}$ i $\sqrt{ab}$

9 Ułóż równanie kwadratowe, którego pierwiastki są kwadratami pierwiastków równania $x^2+3x-10=0$.

10 Sześcienna kostka lodu ma pole powierzchni równe 24 cm². Jaką długość ma krawędź kostki lodu?

11 Pole koła wynosi 10,1736 m². Oblicz przybliżoną długość promienia tego koła.

*4.6. Równania sprowadzalne do równań kwadratowych

Przykład 1.

Rozwiążmy równanie $x^4-5x^2+4=0$.

Zauważmy, że podstawiając zmienną pomocniczą $x^2=t$, otrzymujemy do rozwiązania równanie kwadratowe $t^2-5t+4=0$.

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9,\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

$t_1=\frac{5-3}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1,\ t_2=\frac{5+3}{2\cdot 1}=\frac{8}{2}=4$

Wracamy do podstawienia: $x^2=1$ lub $x^2=4$.

Rozwiązaniem pierwszego równania jest $x=-1$ lub $x=1$, zaś drugiego $x=-2$ lub $x=2$.

Odp.: Równanie wyjściowe ma cztery różne pierwiastki:
$x=-2, x=-1, x=1,\ x=2$.

Równanie $ax^4+bx^2+c=0$ nazywamy równaniem dwukwadratowym, gdyż można je sprowadzić do równania kwadratowego przez podstawienie w miejsce x^2 zmiennej pomocniczej t. Wówczas rozwiązujemy równanie $at^2+bt+c=0$.

Aby wyjściowe równanie dwukwadratowe miało rozwiązanie, równanie kwadratowe ze względu na t musi mieć rozwiązanie nieujemne.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż równania:

a) $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$ b) $x^4 + 6x^2 - 7 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ d) $x^4 + 18x^2 + 56 = 0$

Przykład 2.

CD

Rozwiążmy równanie $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$.

Zauważmy, że przez podstawienie $x^3 = t$ otrzymujemy równanie kwadratowe $t^2 + 19t - 216 = 0$, które rozwiązujemy.

$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-216) = 1225$, $\sqrt{\Delta} = 35$

$t_1 = -27$, $t_2 = 8$

Wracając do podstawienia, otrzymujemy $x^3 = -27$ oraz $x^3 = 8$.

Rozwiązaniami równań są liczby $x = -3$ oraz $x = 2$.

Zadania

1 Rozwiąż równania:

a) $x^4 - 4 = 0$ d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ g) $2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

b) $x^4 - 4x^2 = 0$ e) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ h) $x^4 - x^2 + 1 = 0$

c) $x^4 - x^2 - 2 = 0$ f) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ i) $x^4 + 4\sqrt{2}x^2 + 6 = 0$

2 Rozwiąż równania:

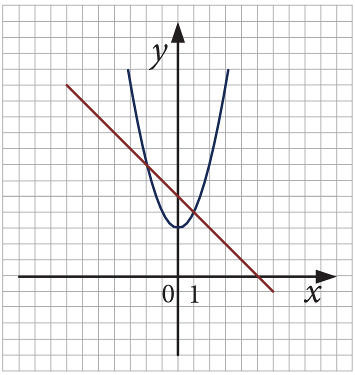
a) $x^6 - 8 = 0$ b) $x^6 - 27x^3 = 0$ c) $x^6 - x^3 - 2 = 0$

*4.7. Układy równań prowadzące do równań kwadratowych

Przykład 1.

Dany jest układ równań $\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

Rozwiąż układ graficznie i algebraicznie. Sprawdź, czy dobrze odczytałeś rozwiązania układu.



Sprowadźmy układ do czytelnej postaci: $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases}$.

W jednym układzie współrzędnych rysujemy parabolę jako wykres funkcji $y = x^2 + 3$ oraz prostą jako wykres funkcji $y = -x + 5$.
Odczytując z rysunku punkty przecięcia się obu wykresów (licząc po kratkach), otrzymujemy rozwiązania:

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y - x^2 = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ algebraicznie.

$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ x + x^2 + 3 = 5 \end{cases}$ ← Z pierwszego równania wyznaczamy y i wstawiamy do równania drugiego.

$x^2 + x - 2 = 0$ ← Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

$x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Tak wyznaczone x wstawiamy do równania pierwszego.

$y_1 = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$ $y_2 = 1^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Jeżeli dany jest układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest pierwszego, a drugie drugiego stopnia, to równanie pierwszego stopnia można zawsze przedstawić w postaci:

$y = mx + n$. (1)

Jeżeli podstawimy w miejsce y w równaniu drugiego stopnia równanie (1), to wraz z równaniem (1) otrzymamy nowy układ równoważny danemu (wyjściowemu) , który będzie już postaci:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$$

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x^2 - y = -4 \\ x - y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$

Przykład 2.

CD

Rozwiąż algebraicznie układ równań $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

$\begin{cases} y=-x+5 \\ x(-x+5)=6 \end{cases}$ ← Z pierwszego równania wyznaczamy na przykład y i wstawiamy do równania drugiego.

$-x^2+5x-6=0$ ← Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$\Delta=25-4\cdot(-1)\cdot(-6)=25-24=1$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$

$x_1=\dfrac{-5-1}{-2}=3$,

$x_2=\dfrac{-5+1}{-2}=2$ ← Tak wyznaczone x wstawiamy do równania pierwszego.

$y_1=-3+5=2$, $y_2=-2+5=3$

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=-15 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

Zadania

1 W jednym układzie współrzędnych narysuj wykresy dwóch funkcji, a następnie odczytaj współrzędne punktów wspólnych tych wykresów. Oblicz, czy dobrze odczytałeś współrzędne.

a) $y=x^2$ i $y=3x-2$ b) $y=x^2-4$ i $y=x-4$

c) $y=-x^2+2$ i $y=-x+2$

2 Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+5y-22=0 \\ xy=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2-y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+5y-20=0 \\ 2x^2-5xy=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=15 \\ x^2-y^2=15 \end{cases}$ f) $\begin{cases} xy=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

3 Oblicz długość boków ściany murowanej, którą należy ocieplić styropianem, mając jej pole S i obwód p.

a) $S = 42\ \mathrm{m}^2,\ \ p = 28\ \mathrm{m}$
b) $S = 24\ \mathrm{m}^2,\ \ p = 20\ \mathrm{m}$

4 Stosunek dwóch liczb jest równy $\frac{1}{2}$, a suma ich kwadratów równa się 180. Znajdź te liczby.

5 Dwóch robotników, pracując jednocześnie, wykopałoby rów w czasie 12 dni. Ile dni kopałby ten rów każdy z robotników samodzielnie, jeśli jeden potrzebuje na to o 7 dni więcej niż drugi?

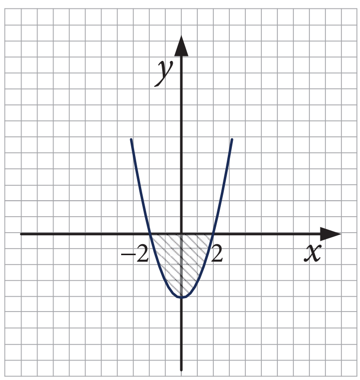
! **6** Dwaj bracia mieszkali w różnych krajach Unii Europejskiej w miejscowościach odległych od siebie o 480 km. Pewnego dnia umówili się na spotkanie w połowie drogi. Pierwszy z nich wyjechał o godzinę później niż drugi, bo wiedział, że jeździ ze średnią szybkością o 20 km/h większą niż jego brat. Z jaką średnią prędkością jeździ każdy z nich, jeśli na miejsce spotkania przyjechali jednocześnie?

4.8. Nierówności kwadratowe

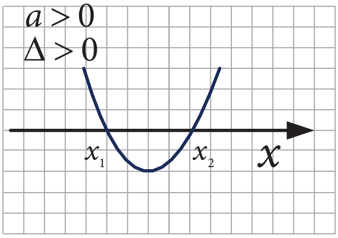
Wiemy już, że rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru tych wartości x, dla których nierówność jest prawdziwa.

Przykład 1.

W celu rozwiązania nierówności $x^2 - 4 < 0$ możemy naszkicować wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4$. Następnie z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań $x \in (-2, 2)$.



Rozpatrzmy wszystkie możliwe położenia paraboli względem osi *Ox*.

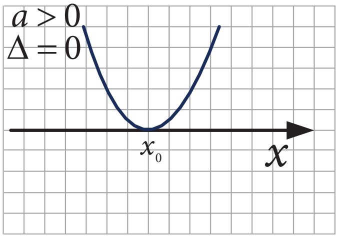


$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, x_1)\cup(x_2,+\infty)$

$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty)$

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x\in(x_1, x_2)$

$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow x\in\langle x_1, x_2\rangle$

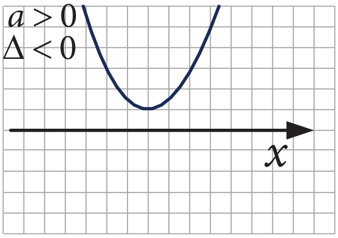


$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow (-\infty, x_0)\cup(x_0,+\infty)$

$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

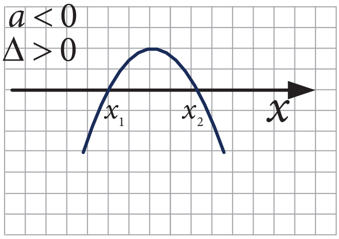
$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow x=x_0$



$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

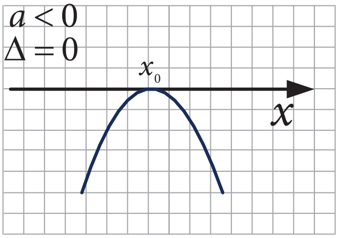


$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\in(x_1, x_2)$

$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow x\in\langle x_1, x_2\rangle$

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, x_1)\cup(x_2,+\infty)$

$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty)$

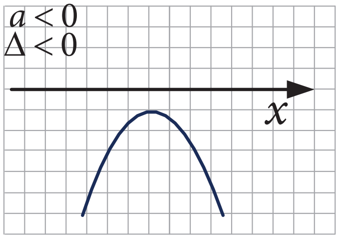


$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow x=x_0$

$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, x_0)\cup(x_0,+\infty)$

$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$



$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

Przykład 2.

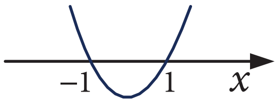
Rozwiąż poniższe nierówności.

a) $x^2 > 1$

$x^2 - 1 > 0$ ← Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę.

$x^2 - 1 = 0$ ← Wyznaczamy pierwiastki równania.

$(x-1)(x+1) = 0$, stąd $x = -1 \quad \vee \quad x = 1$



$f(x) = x^2 - 1$ ← Rozpatrujemy parabolę względem osi *Ox*.

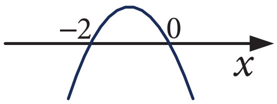
$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ← Odczytane rozwiązania.

b) $-x^2 \geq 2x$

$-x^2 - 2x \geq 0$ ← Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę.

$-x^2 - 2x = 0$ ← Wyznaczamy pierwiastki równania.

$-x(x+2) = 0$, stąd $x = 0 \quad \vee \quad x = -2$



$f(x) = -x^2 - 2x$ ← Rozpatrujemy parabolę względem osi *Ox*.

$x \in \langle -2, 0 \rangle$ ← Odczytane rozwiązania.

Ćwiczenie 1.

Rozwiąż nierówności:

a) $x^2 < -2x + 3$ b) $3x^2 + 6x - 1 \leq -1$ c) $x^2 - 4x - \frac{9}{4} > 0$

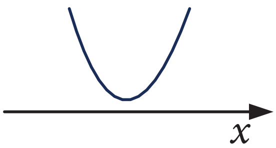
Przykład 3.

Rozwiąż poniższe nierówności.

1. $x^2 - x + 1 \leq 0$

$x^2 - x + 1 = 0$ ← Wyznaczamy pierwiastki równania.

Ponieważ $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, to pierwiastków brak.

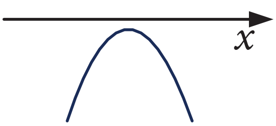


$f(x) = x^2 - x + 1$ ← Rozpatrujemy parabolę względem osi *Ox*.

$x \in \varnothing$ ← Odczytane rozwiązania.

2. $-x^2 + x - 1 \leq 0$

$-x^2 + x - 1 = 0$ ← Wyznaczamy pierwiastki równania.



Ponieważ $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, pierwiastków brak.

$f(x) = -x^2 + x - 1$ ← Rozpatrujemy parabolę względem osi *Ox*.

$x \in \mathbb{R}$ ← Odczytane rozwiązania.

Ćwiczenie 2.

Rozwiąż nierówność:

a) $x^2 - 3x + 7 > 0$ b) $2x^2 - x + 2 < 0$

c) $-x^2 - 3x - 6 > 0$ d) $-x^2 + x - 1 < 0$

Zadania

1 Rozwiąż nierówności:

a) $x(x-2)>0$ e) $x^2-16>0$ i) $x^2-2x-8\geq 0$
b) $x(x+4)<0$ f) $x^2\leq 4$ j) $x^2+12x+24>0$
c) $(x-7)(x+6)\geq 0$ g) $8x^2\geq 24$ k) $x^2+12x+24<0$
d) $2x^2-8x\leq 0$ h) $48<x^2$ l) $x^2<-4(x+1)$

2 Zaznacz na osi liczbowej zbiory $A\cup B$, $A\cap B$.

1. $A=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-8x+15>0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-8x+15>-1\}$
2. $A=\{x\in\mathbb{R}:\ 2x(x-10)\geq 4(x-8)\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:\ x(x+19)\leq 3(18+5x)\}$

3 Krople wody tryskające z fontanny poruszają się po torze zbliżonym do paraboli. Jeżeli wylot z fontanny, znajdujący się na poziomie wody, uznamy za start (zerowa sekunda), to jak długo (w sekundach) krople znajdują się nad powierzchnią wody i w której sekundzie znajdą się w wodzie, gdy tor lotu wyraża się równaniem:

a) $f(t)=-\frac{1}{4}t^2+t$ b) $f(t)=-2t^2+t$ c) $f(t)=-\frac{1}{2}t(t+3)$

*4.9. Wzory Viète'a

W przypadku gdy $\Delta\geq 0$, z porównania współczynników trójmianu kwadratowego (w postaci ogólnej i iloczynowej) mamy:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$ax^2+bx+c=a(x^2-xx_2-x_1x+x_1x_2)$$
$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

{ Uwaga }

Dwa trójmiany są równe, gdy współczynniki przy ich odpowiednich potęgach są równe.

Stwierdzenie zapisane w formie uwagi możemy udowodnić, wiedząc, że dwa trójmiany są równe wtedy, gdy dla dowolnej liczby mają te same wartości.
Mamy dwa trójmiany: $f(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$ oraz $g(x)=a_2x^2+b_2x+c_2$.
Powyższe trójmiany są równe, gdy dla każdego x_1 mają taką samą wartość, czyli:
$f(x_1)=a_1x_1^2+b_1x_1+c_1=g(x_1)=a_2x_1^2+b_2x_1+c_2$.
Stąd $a_1x_1^2+b_1x_1+c_1-(a_2x_1^2+b_2x_1+c_2)=0$.
Zatem $(a_1-a_2)x_1^2+(b_1-b_2)x_1+(c_1-c_2)=0$.
Widać więc, że wyrażenie przyjmuje wartość 0 dla dowolnego x_1 tylko wtedy, gdy $a_1=a_2$ i $b_1=b_2$ i $c_1=c_2$.

{ Uwaga }

Dla $\Delta < 0$ wzory Viète'a nie działają w zbiorze liczb rzeczywistych. Nie można obliczać sumy i iloczynu pierwiastków, które nie istnieją.

Otrzymujemy wzory:

$b = -a(x_1 + x_2)$, stąd $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;

$c = ax_1x_2$, stąd $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Wzory $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

nazywamy wzorami Viète'a.

Twierdzenie

Jeżeli $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, to x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$.

Ćwiczenie 1.

Wyprowadź postać wzorów Viète'a w przypadku, gdy $\Delta = 0$.

Przykład 1.

Nie obliczając pierwiastków trójmianu kwadratowego, umiemy obliczyć ich sumę i iloczyn, np. dla $x^2 - 8x + 12 = 0$ mamy $x_1 + x_2 = -\frac{-8}{1} = 8$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{1} = 12$.

{ Uwaga }

Wzory Viète'a są prawdziwe również dla $\Delta < 0$, ale wówczas mamy do czynienia z pierwiastkami zespolonymi, a to wykracza poza zakres materiału nauczania szkoły ponadgimnazjalnej.

Przykład 2.

Sprawdź, jaki znak mają rozwiązania równania $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Oczywiście możemy rozwiązać równanie i sprawdzić, ale często szybszym i mniej czasochłonnym sposobem okazuje się zastosowanie wzorów Viète'a:

$x_1 + x_2 = \frac{7}{3} > 0 \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{3} > 0$

Wnioski: Iloczyn jest dodatni, zatem oba pierwiastki są tego samego znaku (dodatnie lub ujemne).

Gdyby oba pierwiastki były ujemne, to ich suma też byłaby ujemna; gdy oba pierwiastki są dodatnie, to ich suma też jest dodatnia.

Odp.: Oba pierwiastki są dodatnie.

{ Uwaga }

Wzory Viète'a można wyprowadzić nie tylko dla funkcji kwadratowej, ale również dla dowolnych wielomianów.

Badanie znaku pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Jeżeli iloczyn $x_1 \cdot x_2 < 0$, to pierwiastki mają różne znaki.

Jeżeli iloczyn $x_1 \cdot x_2 > 0$, to pierwiastki mają jednakowe znaki, przy czym obowiązuje wtedy następująca zasada:

jeżeli $x_1 + x_2 > 0$, to oba są dodatnie,

jeżeli $x_1 + x_2 < 0$, to oba są ujemne.

Ćwiczenie 2.

Sprawdź, czy równanie ma pierwiastki rzeczywiste. Jeśli tak, to określ ich znaki.

a) $x^2-5x-5=0$ b) $x^2-10x+8=0$

c) $x^2-378x-5722=0$ d) $11x^2+24x-9=0$

Przykład 3.

Bardzo często w zadaniach wykorzystywane są wzory skróconego mnożenia: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, po przekształceniach: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.
Znajdźmy zatem sumę kwadratów pierwiastków równania $x^2-9x+18=0$.

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ ← Na podstawie wzoru skróconego mnożenia.

$\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}$ ← Na podstawie wzorów Viète'a.

$\left(\frac{9}{1}\right)^2-2\cdot\frac{18}{1}=81-36=45$

Ćwiczenie 3.

Nie obliczając pierwiastków danego równania, wyznacz sumę ich kwadratów.

a) $2x^2+3x+1=0$ b) $x^2-5=0$ c) $2x^2-8x+7=0$ d) $-x^2+4x-4=0$

Zadania

1 Nie obliczając pierwiastków równania, znajdź ich sumę i iloczyn.

a) $x^2-5x+4=0$ c) $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{4}=0$ e) $3x^2-25x+6$

b) $2x^2+5x-7=0$ d) $3{,}5x^2-2{,}5x-3{,}1=0$ f) $-7x^2-49x+1=0$

2 Przekształć wyrażenie dla pierwiastków x_1 i x_2 pewnego trójmianu kwadratowego, aby można było zastosować wzory Viète'a (aby w wyrażeniu wystąpiły tylko sumy i iloczyny pierwiastków).

a) $x_1^2+x_2^2$ b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ c) $(x_1-x_2)^2$

3 Danych jest pięć równań:

$5x^2-3x+428=0,\ 28x^2+47x+15=0,\ 28x^2-47x+15=0,$

$21x^2-x-10=0,\ 21x^2+x-10=0$

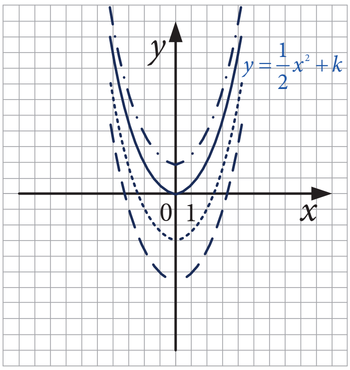
Nie rozwiązując ich, odpowiedz na poniższe pytania dotyczące każdego z nich.
a) Czy równanie ma pierwiastki?
b) Jeżeli ma, to czy są jednakowego znaku, czy też przeciwnego?
c) Jeżeli są jednakowego znaku, to jakiego?
d) Jeżeli są przeciwnego znaku, to jaki znak stoi przy liczbie o większej wartości bezwzględnej?
Sprawdź udzielone odpowiedzi, rozwiązując te równania.

4 Wiadomo, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $-10x^2-10x-1=0$ i $x_1<x_2$. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $x_1^2+x_2^2$ c) x_1-x_2 e) $x_1^3-x_2^3$ g) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$

b) $x_1^2-x_2^2$ d) $x_1^3+x_2^3$ f) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ h) $(x_1-x_2)^2$

*4.10. Równania kwadratowe z parametrem



Czasami spotykamy się z zagadnieniami polegającymi na przykład na przedyskutowaniu liczby rozwiązań bądź położenia w układzie współrzędnych w zależności od parametru.
Rozpatrzmy rodzinę parabol o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2+k$. Co możemy zaobserwować?
Zaobserwujemy, że w zależności od liczby k parabola ma jakieś konkretne położenie w układzie współrzędnych. Mianowicie albo przecina oś Ox, albo nie. Możemy zatem powiedzieć, że w zależności od liczby k parabola o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2+k$ ma dwa punkty przecięcia z osią Ox albo jeden punkt przecięcia z osią Ox, albo nie ma punktów przecięcia z osią Ox. Liczbę k nazywamy **parametrem**. Możemy powiedzieć, że dla $k\in(-\infty,0)$ parabola o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2+k$ ma dwa punkty przecięcia z osią Ox, dla $k=0$ jeden punkt przecięcia, a dla $k>0$ nie ma punktów przecięcia z osią Ox.

Przykład 1.

Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2+2(m-1)x+m-3=0$:

a) ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Zauważmy, że — w zależności od m — mamy do czynienia z równaniem liniowym bądź kwadratowym. Rozpatrzmy te przypadki.

1. Równanie liniowe, czyli $m=0$. Wówczas równanie przyjmuje postać $-2x-3=0$. Stąd otrzymujemy jedno rozwiązanie: $x=-\frac{3}{2}$.

2. Równanie kwadratowe; $m\neq 0$. Wówczas, aby równanie miało dokładnie jedno rozwiązanie, warunek $\Delta=0$ musi być spełniony.

$\Delta=4(m-1)^2-4m(m-3)=$

$=4m^2-8m+4-4m^2+12m=$

$=4m+4=0$

Stąd $m=-1$.

Odp.: Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $m=0$ lub $m=-1$.

b) ma dwa różne rozwiązania?

Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy $\Delta>0 \wedge m\neq 0$.

Stąd $\Delta=4m+4>0$, czyli $m>-1 \wedge m\neq 0$.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego informuje o liczbie rozwiązań równania kwadratowego:
jeżeli $\Delta>0$, to równanie posiada dwa różne rozwiązania rzeczywiste,
jeżeli $\Delta=0$, to równanie posiada dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste,
jeżeli $\Delta<0$, to równanie nie posiada rozwiązań rzeczywistych.

{ Uwaga }

Jeżeli współczynniki trójmianu kwadratowego $y=ax^2+bx+c$ zależą od parametru, to należy pamiętać, że w szczególnym przypadku możemy mieć do czynienia z funkcją liniową, gdy $a=0$, lub nawet funkcją stałą, gdy $a=0$ i $b=0$.

Ćwiczenie 1.

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie?

a) $x^2+mx-1=0$ b) $x^2+x-m=0$

c) $mx^2+x-1=0$ d) $(m-1)x^2+mx-1=0$

Przykład 2.

Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^2-(m+1)x+\frac{1}{4}(m+1)=0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

{ Wskazówka }

Iloraz jest zawsze tego samego znaku co iloczyn licznika i mianownika.

$\frac{a}{b}<0 \Leftrightarrow a\cdot b<0$

$\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow a\cdot b>0$

{ Uwaga }

Znak pierwiastków trójmianu kwadratowego zależy od znaku ich iloczynu i sumy (wzory Viète'a).

Spełnione muszą być warunki:

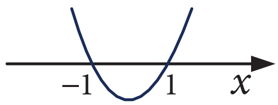
1. $a\neq 0$ (aby pierwiastki były różnych znaków, muszą być dwa pierwiastki — sytuację liniową odrzucamy).
2. $\Delta>0$ (aby pierwiastki były różnych znaków, muszą być dwa różne).
3. $x_1x_2<0$ (iloczyn liczb o przeciwnych znakach jest ujemny).

Rozpatrujemy kolejne warunki:

1. $m-1\neq 0$, stąd $m\neq 1$.
2. $\Delta=\left(-(m+1)\right)^2-4(m-1)\cdot\frac{1}{4}(m+1)=m^2+2m+1-\left(m^2-1\right)=2m+2>0$, stąd $m>-1$.
3. $x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{4}(m+1)}{m-1}<0$, stąd $\frac{m+1}{m-1}<0$.

Zatem $(m+1)(m-1)<0$.

$m\in(-1,1)$



Wyznaczamy część wspólną rozwiązań warunków 1., 2. i 3.:

$m\neq 1 \wedge m>-1 \wedge m\in(-1,1)$.

Odp.: $m\in(-1,1)$.

Ćwiczenie 2.

Dla jakich wartości parametru m pierwiastki równania mają różne znaki?

a) $x^2+mx-1=0$ b) $x^2+x-m=0$

c) $mx^2+x-1=0$ d) $(m-1)x^2+mx-1=0$

Równanie dwukwadratowe z parametrem

Równanie

(1) $ax^4+bx^2+c=0$

rozwiązujemy przez podstawienie $x^2=t$ i rozwiązanie równania

(2) $at^2+bt+c=0$.

Liczba rozwiązań rzeczywistych równania dwukwadratowego

Równanie (1) może:

1) mieć cztery różne rozwiązania, gdy równanie (2) ma dwa różne rozwiązania dodatnie;
2) mieć trzy różne rozwiązania, gdy równanie (2) ma jedno rozwiązanie dodatnie, a jedno zerowe;
3) mieć dwa różne rozwiązania, gdy równanie (2) ma jedno rozwiązanie dodatnie, a drugie ujemne lub gdy drugiego (różnego od pierwszego) nie ma;
4) mieć jedno rozwiązanie, gdy równanie (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie i to rozwiązanie jest zerem;
5) nie mieć rozwiązań, gdy równanie (2) nie ma rozwiązań lub ma rozwiązania, ale wszystkie są ujemne.

Ćwiczenie 3.

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^4+x^2-m=0$ nie ma rozwiązań, a dla jakich ma:

a) cztery różne rozwiązania?
b) trzy różne rozwiązania?
c) dwa różne rozwiązania?
d) jedno rozwiązanie?

Zadania

1 Dla jakich wartości parametru m równanie

a) $x^2=m$ b) $x^2+4=m$ c) $x^2+m=4$

(i) ma dokładnie jedno rozwiązanie?
(ii) ma dwa różne rozwiązania?
(iii) nie ma rozwiązań?

2 Jaki warunek spełnia parametr m, jeśli funkcja $f(x)=mx^2+2x+2$

a) ma dwa różne miejsca zerowe?
b) ma jedno miejsce zerowe?
c) nie ma miejsc zerowych?

3 Przy jakich wartościach k podane poniżej trójmiany nie mają pierwiastków, przy jakich mają jeden, a przy jakich mają dwa?

a) x^2+k
b) x^2-k
c) $k-x^2$
d) $k-2x^2$
e) x^2-6x+k
f) $2x^2-4x-k$
g) $x^2-2kx+3$
h) x^2+kx+3
i) $-x^2-2kx+5$
j) $-2x^2-4kx-7$

4 Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m.

a) $x^2+mx+1=0$
b) $2x^2-(3m+2)x+12=0$
c) $x^2-2mx+(m^2-1)=0$
d) $(2+m)x^2+2(1-m)x+(m+2)=0$

5 Wykaż, że równanie $3x^2+mx-4=0$ ma dwa różne rozwiązania dla każdego $m\in\mathbb{R}$.

6 Wykaż, że równanie $3x^2+mx+4(m^2+1)=0$ nie ma rozwiązania dla każdego rzeczywistego m.

7 Wyznacz wartości parametru p, dla których równanie $x^2+(p+1)x+(p+3)=0$ ma oba pierwiastki dodatnie.

8 Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^2-(m+1)x-m=0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

9 Dla jakich wartości parametru k równanie $x^2+(k-3)x+k-5=0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

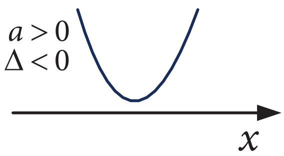
10 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^4-2(m+3)x^2+m+1=0$ ma cztery różne pierwiastki.

11 Zbadaj, dla jakich wartości parametru m równanie $(m-2)x^4-2(m+3)x^2+m+1=0$ ma trzy różne pierwiastki.

*4.11. Nierówności kwadratowe z parametrem

Przykład 1.

Dla jakich wartości parametru k nierówność $kx^2+4>0$ jest spełniona dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$? Zadanie sprowadza się do pytania, dla jakich k funkcja postaci $f(x)=kx^2+4$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x\in\mathbb{R}$.
Rozpatrzmy następujące sytuacje:
1. Dla $k=0$ mamy $f(x)=4>0$. Jest to funkcja stała, zawsze przyjmująca wartość dodatnią równą 4.
lub
2. Jeżeli $k\neq 0$, to mamy do czynienia z funkcją kwadratową. Aby spełniała warunki zadania, jej wykres musi być położony tak jak na rysunku.



Spełnione mają być jednocześnie dwa warunki: $k>0$ i $\Delta=0^2-4k\cdot 4<0$, stąd $k>0$.
Alternatywą warunków 1. i 2. jest $k\in\langle 0,+\infty)$.

Przykład 2.

Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x)=(k-1)x^2+(k-1)x-1$ przyjmuje wartości ujemne dla wszystkich x rzeczywistych?

Skorowidz

M

N

O

P

R

S

Ś

T

U

W

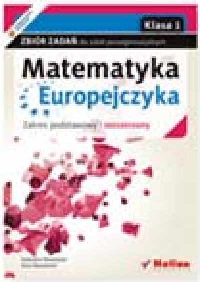
Z

Dobre wyniki z matematyki

Umiesz liczyć? Licz na ***Matematykę Europejczyka***! Z nią nie tylko nauka, ale także codzienne życie stanie się prostsze i bardziej zrozumiałe. Podręcznik składa się z pięciu rozdziałów, obejmujących wiedzę i zadania z zakresu nauki o zbiorach, liczb rzeczywistych, figur geometrycznych na płaszczyźnie, funkcji i ich własności oraz funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Każdy rozdział zawiera dział **Z zastosowań matematyki**, w którym uczniowie wraz z nauczycielem znajdą praktyczne i zaskakujące tematy badawcze. W przygotowaniu do egzaminu dojrzałości, niezastąpiona okaże się część **Prosto do matury**, zawierająca zestawy zadań testowych, rachunkowych oraz matematyczne eksperymenty. Książka posiada także informacje **Spoza podstawy programowej**, skierowane do szczególnie dociekliwej młodzieży. Dodatkową pomocą są odpowiedzi do większości zadań z podręcznika, tabela ze wzorami oraz skorowidz, które pomagają w samodzielnej nauce.

Kompletny zestaw Matematyka Europejczyka. Klasa 1

stanowią **podręcznik + zbiór zadań + płyta CD**.



Seria podręczników, zbiorów zadań, zeszytów ćwiczeń i płyt CD *Matematyka Europejczyka* wydawnictwa Helion pozwala uczniom zdobywać wiedzę bez stresu, a nauczycielom ułatwia przekazywanie nowego materiału w interesujący i niebanalny sposób.

Matematyka Europejczyka – TO SIĘ LICZY!

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
http://helion.pl

ISBN 978-83-246-2400-3

9788324624003