DO NOWEJ PODSTAWY PROGRAMOWEJ

Klasa 3

PODRĘCZNIK dla szkół ponadgimnazjalnych

Matematyka Europejczyka

Zakres podstawowy i **rozszerzony**

Katarzyna Nowoświat

Artur Nowoświat

Helion EDUKACJA

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr. Michała Krycha, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr. Jarosława Pacuły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony.
Etap edukacyjny: IV.
Typ szkoły: szkoły ponadgimnazjalne.
Rok dopuszczenia 2014.
Numer ewidencyjny w wykazie: 521/3/2014

Redaktor prowadzący: Joanna Zaręba
Projekt okładki: ULABUKA

Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *http://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

ISBN: 978-83-246-2410-2

Printed in Poland.

Spis treści

1. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Rozważania matematyczne, z jakimi mieliśmy dotychczas do czynienia, charakteryzują się tym, że w określonych warunkach ze spełnienia zestawu założeń wynikają jednoznacznie określone konsekwencje. Przykładowo, jeżeli upuścimy z wysokości 30 m kamień, to potrafimy obliczyć, po ilu sekundach spadnie on na ziemię. Widzimy więc, że możliwe jest opisanie wielu praw i mechanizmów rządzących światem, w którym żyjemy.

Ale czy wszystkich? Próba odpowiedzi na pytanie, jaka szóstka liczb wypadnie w najbliższym losowaniu Dużego Lotka, pokazuje, że istnieją zjawiska, których zajście jest kwestią przypadku. W takich sytuacjach nie wiemy, jaki będzie rezultat, ale możemy spróbować ocenić, jaka jest szansa na jego zaistnienie.

W skutecznym rozwiązaniu tego typu problemów pomocny jest specjalny dział matematyki zwany **rachunkiem prawdopodobieństwa**.

Pewien francuski szlachcic, kawaler de Méré, żyjący w XVII wieku, chcąc wygrywać w kości, zwrócił się do swojego przyjaciela, wybitnego matematyka Blaise'a Pascala, z prośbą, aby rozważył następujący problem: W rzucie trzema kostkami sumę oczek równą 11 można uzyskać na sześć sposobów, wyrzucając na kostkach liczbę oczek równą: 1, 4, 6 lub 1, 5, 5, lub 2, 3, 6, lub 2, 4, 5, lub 3, 4, 4, lub 3, 3, 5. Sumę oczek równą 12 można też uzyskać na sześć sposobów: 1, 5, 6, lub 2, 4, 6, lub 2, 5, 5, lub 3, 3, 6, lub 3, 4, 5, lub 4, 4, 4. Dlaczego więc częściej wypada suma równa 11 niż 12?
Pascal bardzo zainteresował się tym zagadnieniem i napisał w tej sprawie list do innego sławnego matematyka, Pierre'a de Fermata. List ten zachęcił Fermata do rozważań, które przyczyniły się do stworzenia teorii dającej możliwość obliczania prawdopodobieństwa wygrania w grze w kości.

1.1. Zliczanie obiektów

Przykład 1.

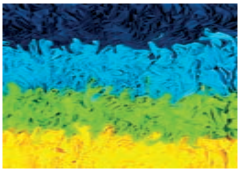
Flaga niemiecka składa się z trzech pasów poziomych, ustawionych od najniższego do najwyższego w następującej kolejności: pas złoty, pas czerwony, pas czarny. Ustalmy, ile różnych flag można otrzymać, przestawiając kolejność tych pasów. Zauważmy, że jeżeli do oznaczenia kolorów użyjemy pierwszych liter słów oznaczających te kolory w języku niemieckim: **g**olden, **r**ot, **s**chwarz, to wszystkie możliwe ustawienia będą następujące: g, r, s; g, s, r; s, g, r; s, r, g; r, s, g; r, g, s.

Zatem wszystkich możliwości, jak łatwo policzyć, jest 6.

Gdyby liczba pasów była większa, podana metoda byłaby bardzo żmudna. Ponieważ w naszych rozważaniach kolejność kolorów jest istotna, więc ustawienia pasów wygodnie jest zapisywać jako ciągi. Pytamy się więc, ile można zbudować trzyelementowych ciągów o różnych wyrazach ze zbioru trzyelementowego. Kolor najniższego pasa możemy wybrać na trzy sposoby. Gdy kolor pierwszego pasa jest już ustalony, zauważamy, że mamy dwie możliwości ustalenia koloru drugiego pasa. Po ustaleniu kolorów dwóch dolnych pasów kolor trzeciego pasa jest wyznaczony jednoznacznie. A więc wszystkich takich ustawień (ciągów) jest $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ćwiczenie 1.

Wypisz wszystkie możliwości i oblicz, ile można uszyć flag czterokolorowych, o układzie barw takim jak na rysunku obok, mając do dyspozycji tkaniny w czterech kolorach.



Zauważmy, że analogiczny schemat rozumowania możemy zastosować w następującej sytuacji.

Przykład 2.

Obliczmy, ile istnieje liczb czterocyfrowych zbudowanych wyłącznie z cyfr 0, 2, 4, 6, 8.

Tak jak w przykładzie 1., liczbę czterocyfrową możemy utożsamić z ciągiem czterowyrazowym, w którym na pierwszym miejscu stoi cyfra tysięcy, na drugim cyfra setek, na trzecim cyfra dziesiątek, a na ostatnim cyfra jedności. A więc nasz zliczany obiekt możemy utożsamić z ciągiem. Pierwszy wyraz tego ciągu możemy wybrać na cztery sposoby (cyfra 0 nie może stać na pierwszym miejscu). Na pozostałych miejscach może stać dowolna z 5 cyfr, czyli wszystkich takich liczb jest $n = 4 \cdot 5^3 = 500$.

Przykład 3.

Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Obliczmy, ile jest wszystkich możliwych wyników takich rzutów, jeżeli uwzględnimy kolejność otrzymanych wyników.

Wypiszmy wszystkie takie wyniki. Możemy je zapisać jako ciągi dwuelementowe. Pierwsza cyfra w nawiasie oznacza wynik pierwszego rzutu, a druga drugiego. Odpowiednich ciągów jest 36:

$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6)$

$(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6)$

$(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6)$

$(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6)$

$(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6)$

$(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)$

To zadanie można rozwiązać, nie wypisując wszystkich możliwych sytuacji.

Wyników pierwszego rzutu jest 6 (może wypaść 1 lub 2, lub 3, lub 4, lub 5, lub 6), drugiego również 6. Zatem wszystkich wyników jest $6 \cdot 6 = 36$.

Ćwiczenie 2.

Ile jest wszystkich możliwych wyników przy trzykrotnym rzucie symetryczną kostką do gry?

Przykład 4.

Obliczmy, ile haseł składających się z czterech znaków można ułożyć z liter A, B i cyfr 1, 2, przy założeniu, że pierwsze dwa znaki to różne litery, a kolejne dwa znaki to różne cyfry.

Dwie litery można ustawić na dwa sposoby: AB, BA; dwie cyfry możemy ustawić także na dwa sposoby: 12, 21. Zatem wszystkich ustawień jest $2 \cdot 2 = 4$, bo każda konfiguracja liter może być połączona z każdą konfiguracją cyfr.

Twierdzenie **Reguła mnożenia**

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno n decyzji, przy czym pierwszą z nich można podjąć na k_1 sposobów, drugą na k_2 sposobów, …, n-tą na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ sposobów.

{ Uwaga }

Analizując przykłady 1. – 4., widzimy, że jeżeli zliczany obiekt możemy utożsamić z ciągiem, to wygodnie jest zastosować regułę mnożenia.

Rozważmy teraz sytuację, w której zliczany obiekt utożsamiamy ze zbiorem.

Przykład 5.

Obliczmy, na ile sposobów możemy wybrać trzy książki ze zbioru dwudziestu książek.

Zauważmy, że kolejność wybieranych książek jest w tej sytuacji nieistotna. Nie ma bowiem różnicy, czy np. najpierw wybierzemy książkę X, później Y, a na końcu Z, czy też najpierw książkę Z, potem X, a na końcu Y. Zbiór wybranych książek jest ten sam. Rozpatrujemy więc zbiory trzyelementowe, a nie ciągi trzyelementowe. Oczywiście zbiorów trzyelementowych jest mniej niż ciągów. Ciągi (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y), (Z, Y, X) są utworzone z elementów jednego zbioru $\{X, Y, Z\}$. Ponieważ trzy elementy pewnego zbioru możemy ustawić w trzyelementowe ciągi na 6 sposobów, to liczba trzyelementowych zbiorów jest 6 razy mniejsza niż liczba trzyelementowych ciągów.

Załóżmy wpierw, że kolejność wyboru książek jest istotna. Podobnie jak w poprzednich przykładach, rozumujemy następująco: pierwszą książkę możemy wybrać na 20 sposobów, drugą na 19 sposobów, a trzecią na 18 sposobów. Liczba trzyelementowych ciągów jest równa $20 \cdot 19 \cdot 18$. A więc liczba trzyelementowych zbiorów wynosi $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$.

Ze zbioru 20 książek trzy książki możemy wybrać na 1140 sposobów.

Przykład 6.

Obliczmy, ile różnych odcinków można zbudować, mając do dyspozycji 15 punktów, z których żadne 3 punkty nie leżą na jednej prostej.

Każdy odcinek możemy utożsamić ze zbiorem dwuelementowym, składającym się z jego końców.

Liczymy najpierw, ile ciągów dwuelementowych można utworzyć z punktów zbioru piętnastoelementowego. Korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy $n = 15 \cdot 14 = 210$. Ponieważ ze zbioru dwuelementowego można utworzyć dwa ciągi, więc liczba odcinków jest równa $n : 2 = 210 : 2 = 105$.

Rozpatrzmy teraz poniższą sytuację, w której zliczane obiekty są dwóch rodzajów.

Przykład 7.

Obliczmy, ile można ułożyć haseł komputerowych składających się z trzech znaków, wiedząc, że hasło składa się bądź z trzech różnych liter: A, B, C, bądź z trzech różnych cyfr: 1, 2, 3.

Zauważmy, że możliwości ułożenia hasła z trzech liter, podobnie jak z trzech cyfr, jest 6. Zatem albo mamy hasło trzyliterowe ułożone na 6 sposobów, albo trzycyfrowe ułożone na 6 sposobów. Wszystkich możliwości jest więc $6 + 6 = 12$.

Twierdzenie

Reguła dodawania

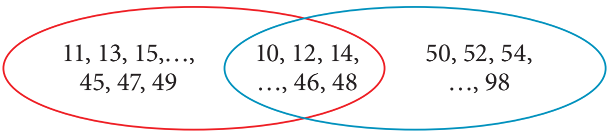
Jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z n wykluczających się wzajemnie możliwości, przy czym pierwszą z nich można podjąć na k_1 sposobów, drugą na k_2 sposobów, …, n-tą na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ sposobów.

Ćwiczenie 3.

Na prezent dla koleżanki możemy kupić jedną płytę spośród siedmiu płyt jednego zespołu, który ona lubi, lub jedną książkę spośród trzech jej ulubionego autora. Na ile sposobów możemy wybrać prezent?

Przykład 8.

Obliczmy, ile jest liczb dwucyfrowych, które są mniejsze od 50 lub parzyste.



W tym przypadku nie możemy stosować prostej reguły dodawania, ponieważ niektóre liczby parzyste są mniejsze od 50 i wybór liczb mniejszych od 50 oraz wybór liczb parzystych nie są wyborami wykluczającymi się wzajemnie. Możemy natomiast policzyć, ile jest liczb dwucyfrowych mniejszych od 50 (jest ich 40), a następnie ile jest liczb parzystych dwucyfrowych większych od 50 bądź równych 50 (jest ich 25). Te wybory już się wzajemnie wykluczają. Stosując regułę dodawania, przekonujemy się, że liczb dwucyfrowych, które są mniejsze od 50 lub parzyste, jest $40 + 25 = 65$.

Można też policzyć, ile jest liczb dwucyfrowych mniejszych od 50 (jest ich 40), ile jest liczb dwucyfrowych parzystych (jest ich 45) oraz ile jest liczb dwucyfrowych parzystych, które są mniejsze od 50 (jest ich 20), a następnie wykonać działanie: $40 + 45 - 20 = 65$.

Zadania

1 Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą naturalną dodatnią mniejszą od 20, a druga jest liczbą naturalną z przedziału $\langle 15, 30 \rangle$?

2 Ile jest wszystkich kodów składających się z dwóch liczb, z których pierwsza jest dzielnikiem liczby 36, a druga jest dzielnikiem liczby 100?

3 Ile jest wszystkich możliwych kodów składających się z różnych znaków, w których to kodach na początku występują trzy cyfry ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a później dwie litery ze zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$?

4 Ile jest wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na czterokrotnym rzucie monetą?

5 Oblicz:

a) ile istnieje liczb trzycyfrowych składających się z cyfr 0, 1, 2,
b) ile istnieje liczb trzycyfrowych parzystych składających się z cyfr 0, 1, 2.

6 Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3?

7 Uczniowie pierwszej klasy postanowili zakodować swoje szafki w szatni czterocyfrowymi kodami, składającymi się z cyfr 1, 2, 3, 4. Ile jest możliwych kodów, gdy:

a) cyfry nie mogą się powtarzać?
b) cyfry mogą się powtarzać?

8 Stołówka studencka oferuje na obiad dwie zupy: pomidorową i ogórkową, trzy drugie dania: pierogi, kotlet mielony i rybę, dwa desery: szarlotkę i lody. Student zdecydował się wybrać obiad składający się tylko z dwóch dań: zupy i drugiego dania lub drugiego dania i deseru. Na ile sposobów może ułożyć swój zestaw obiadowy.

9 Na ile sposobów można ustawić w kolejce 7 osób?

10 Ile jest liczb czterocyfrowych mniejszych od 3000, składających się z cyfr 1, 2, 3, 4?

11 Z urny zawierającej kule: białą, czarną, żółtą i zieloną, losujemy trzy kule bez zwracania. Na ile sposobów można dokonać takiego losowania, jeżeli kolejność losowania jest istotna?

12 Podczas egzaminu student losuje 3 pytania spośród 7. Na ile sposobów może to zrobić?

13 Na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację z ośmioosobowej grupy?

14 Osiem osób przywitało się każda z każdą uściskiem dłoni. Ile było powitań?

*1.2. Elementy kombinatoryki

W podrozdziale 1.1 obliczaliśmy z wykorzystaniem elementarnych rozumowań liczbę obiektów będących ciągami lub zbiorami skończonymi. Odbywało się to metodą łączenia w pary, trójki itd. (uporządkowane lub nieuporządkowane) elementów z ustalonych zbiorów, tak aby spełnione były wymagane warunki. Dział matematyki zajmujący się tego typu problemami nazywa się kombinatoryką. Oferuje ona szereg narzędzi, które ułatwiają (lub w ogóle umożliwiają) rozwiązywanie zadań opisanego rodzaju o różnym stopniu komplikacji.

Przykład 1.

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 3 i 4.

Pierwszy element ciągu (cyfrę tysięcy danej liczby) możemy wybrać na dwa sposoby, na drugim miejscu (cyfra setek) też możemy umieścić jedną z dwóch cyfr. Tak więc na dwóch pierwszych miejscach możemy umieścić cyfry na 4 sposoby. Na trzecim (cyfra dziesiątek) i czwartym (cyfra jedności) miejscu możemy również umieścić cyfry 3 lub 4. A więc liczba wszystkich możliwości wynosi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Tłumacząc to zagadnienie na język matematyki, pytamy, ile ciągów czterowyrazowych możemy zbudować ze zbioru dwuelementowego, jeżeli elementy mogą się powtarzać.

Każdy taki czterowyrazowy ciąg utworzony z cyfr 3 i 4, w którym elementy mogą się powtarzać, nazywamy czterowyrazową wariacją z powtórzeniami zbioru dwuelementowego $\{3,4\}$.

{ Uwaga }

Ciąg k-wyrazowy to funkcja o dziedzinie $\{1, 2, \dots, k\}$.

Definicja

Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbb{N}_+$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z k niekoniecznie różnych elementów tego zbioru.

Na kolejnych stronach liczbę wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego będziemy oznaczać symbolem W_n^k.

Jeżeli ze zbioru składającego się z n elementów wybieramy k elementów $(k \le n)$, w ten sposób, że:

- istotna jest kolejność wybieranych elementów,
- wybierane elementy mogą się powtarzać,

to w ten sposób budujemy k-wyrazową wariację z powtórzeniami tego zbioru.

Ćwiczenie 1.

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2 i 3?

Przykład 2.

Dany jest zbiór Z składający się z liczb 5, 6, 7, 8, 9 , czyli $Z=\{5,6,7,8,9\}$.

Ponieważ możemy utworzyć pięć jednowyrazowych ciągów z elementów zbioru Z, więc mamy pięć jednowyrazowych wariacji z powtórzeniami. Są nimi jednowyrazowe ciągi (5), (6), (7), (8), (9). Zatem $W_5^1 = 5$.

Dopisując w powyższych wariacjach na drugim miejscu kolejno elementy zbioru Z, otrzymamy dwuwyrazowe wariacje z powtórzeniami zbioru Z:

$(5,5)$, $(5,6)$, $(5,7)$, $(5,8)$, $(5,9)$,

$(6,5)$, $(6,6)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(6,9)$,

$(7,5)$, $(7,6)$, $(7,7)$, $(7,8)$, $(7,9)$,

$(8,5)$, $(8,6)$, $(8,7)$, $(8,8)$, $(8,9)$,

$(9,5)$, $(9,6)$, $(9,7)$, $(9,8)$, $(9,9)$.

Zatem $W_5^2 = 5 \cdot W_5^1 = 5 \cdot 5 = 5^2$.

Dalej weźmy dwuwyrazowe wariacje z powtórzeniami zaczynające się od liczby 5 i dopiszmy na trzecim miejscu kolejno elementy zbioru Z, otrzymując trzyelementowe wariacje zbioru Z:

$(5,5,5)$, $(5,5,6)$, $(5,5,7)$, $(5,5,8)$, $(5,5,9)$,

$(5,6,5)$, $(5,6,6)$, $(5,6,7)$, $(5,6,8)$, $(5,6,9)$,

$(5,7,5)$, $(5,7,6)$, $(5,7,7)$, $(5,7,8)$, $(5,7,9)$,

$(5,8,5)$, $(5,8,6)$, $(5,8,7)$, $(5,8,8)$, $(5,8,9)$,

$(5,9,5)$, $(5,9,6)$, $(5,9,7)$, $(5,9,8)$, $(5,9,9)$.

Postępując analogicznie z pozostałymi dwuwyrazowymi wariacjami, dochodzimy do wniosku, że $W_5^3 = 5 \cdot W_5^2 = 5 \cdot 5^2 = 5^3$.

Następnie, biorąc trzywyrazowe wariacje z powtórzeniami i dopisując na czwartym miejscu kolejno elementy zbioru Z, otrzymujemy czteroelementowe wariacje z powtórzeniami zbioru Z.

Rozumując tak jak wyżej, mamy $W_5^4 = 5 \cdot W_5^3 = 5 \cdot 5^3 = 5^4$.

Twierdzenie

Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n elementowego wyraża się wzorem $W_n^k = n^k$.

Wszystkie k-elementowe ciągi opisane w powyższym twierdzeniu możemy zliczyć, stosując regułę mnożenia. Ponieważ kolejne wyrazy ciągu można wybrać na n sposobów, więc ich liczba wyraża się wzorem $W_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ razy}} = n^k$.

{ Uwaga }

Zauważmy, że każda wariacja n-elementowa jest funkcją określoną na zbiorze liczb naturalnych $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Przykład 3.

Obliczmy, ile jest wszystkich liczb dwucyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5 i żadna z cyfr się nie powtarza.

Zauważmy, że pierwszą cyfrę możemy wybrać na 5 sposobów, a drugą na 4 sposoby. Zgodnie z regułą mnożenia otrzymujemy $5 \cdot 4 = 20$. Są to następujące liczby:

12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

Stosując język matematyki, pytamy, ile ciągów dwuwyrazowych możemy zbudować, używając różnych elementów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Każdy taki dwuwyrazowy ciąg utworzony z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, w którym wyrazy nie powtarzają się, nazywamy dwuwyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Definicja

Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbb{N}_+$ oraz $k \leq n$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z k różnych elementów tego zbioru.

Dalej liczbę k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego będziemy oznaczać symbolem V_n^k.

Ćwiczenie 2.

Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i żadna cyfra się nie powtarza?

Przykład 4.

Dany jest zbiór Z składający się z liczb 5, 6, 7, 8, 9, czyli $Z=\{5,6,7,8,9\}$.

Mamy pięć jednowyrazowych wariacji bez powtórzeń, są nimi jednowyrazowe ciągi

(5), (6), (7), (8), (9),

więc $V_5^1=5$.

Dopisując w powyższych wariacjach na drugim miejscu kolejno elementy zbioru Z niewystępujące w tej wariacji, otrzymamy dwuwyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru Z:

$(5,6)$, $(5,7)$, $(5,8)$, $(5,9)$,

$(6,5)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(6,9)$,

$(7,5)$, $(7,6)$, $(7,8)$, $(7,9)$,

$(8,5)$, $(8,6)$, $(8,7)$, $(8,9)$,

$(9,5)$, $(9,6)$, $(9,7)$, $(9,8)$,

więc $V_5^2=4\cdot V_5^1=4\cdot 5$.

Dalej weźmy dwuwyrazowe wariacje bez powtórzeń i dopiszmy na trzecim miejscu kolejno elementy zbioru Z niewystępujące w tej wariacji. Otrzymamy trzyelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru Z.

$(5,6,7)$, $(5,6,8)$, $(5,6,9)$,

$(5,7,6)$, $(5,7,8)$, $(5,7,9)$,

$(5,8,6)$, $(5,8,7)$, $(5,8,9)$,

$(5,9,6)$, $(5,9,7)$, $(5,9,8)$.

Postępując analogicznie z pozostałymi dwuwyrazowymi wariacjami, dochodzimy do wniosku, że $V_5^3=3\cdot V_5^2=3\cdot 4\cdot 5$.

Następnie do trzywyrazowych wariacji z powtórzeniami dopiszemy na czwartym miejscu kolejno elementy zbioru Z. Otrzymamy czteroelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru Z.

W wyniku otrzymujemy $V_5^4=2\cdot V_5^3=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$.

Twierdzenie Liczba wszystkich k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k,n\in\mathbb{N}_+$ oraz $k\le n$, wyraża się wzorem $V_n^k=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

Twierdzenie można udowodnić za pomocą indukcji matematycznej.

Wzór ten można zapisać w innej postaci. W tym celu wprowadźmy następującą definicję:

Definicja

Silnią liczby naturalnej $n > 1$ (zapisujemy $n!$) nazywamy iloczyn wszystkich liczb naturalnych dodatnich nie większych od n:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$

Przyjmujemy dodatkowo, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

Stąd wzór wyznaczający liczbę wariacji z powtórzeniami możemy przekształcić następująco:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Jeżeli ze zbioru zawierającego n elementów wybieramy k elementów $(k \le n)$, w ten sposób, że:

- istotna jest kolejność wybieranych elementów,
- wybierane elementy nie mogą się powtarzać,

to w ten sposób budujemy k-wyrazową wariację bez powtórzeń tego zbioru.

Definicja

Permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

W dalszej części rozdziału liczbę permutacji zbioru n-elementowego oznaczamy symbolem P_n.

{ Uwaga }

Zauważmy, że permutacja zbioru n-elementowego jest n-wyrazową wariacją bez powtórzeń tego zbioru.

Przykład 5.

Obliczmy, ile liczb czterocyfrowych, o różnych cyfrach, można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4.

Mamy więc $V_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = P_4$.

Twierdzenie

Liczba wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest równa $P_n = n!$.

{ Uwaga }

Zauważmy, że zagadnienie obliczania liczby wariacji i permutacji pokrywa się z zagadnieniem obliczania liczby wyborów kolejnych decyzji omówionym w poprzednim rozdziale. Możemy więc zamiast podanych wzorów stosować regułę mnożenia.

Ćwiczenie 3.

Na ile sposobów można poprzestawiać 10 osób stojących w kolejce po bilety?

Przykład 6.

W czasie egzaminu student losuje trzy pytania ze zbioru 60 pytań i odpowiada na nie w dowolnej kolejności. Chcemy obliczyć, na ile sposobów student może wylosować pytania.

Używając terminów matematycznych, pytamy, ile zbiorów trzyelementowych możemy utworzyć ze zbioru 60-elementowego. Zauważmy, że tutaj kolejność losowania pytań nie odgrywa roli i pytania nie powtarzają się, więc otrzymujemy trzyelementowe podzbiory zbioru wszystkich pytań.

Definicja

Kombinacją k-elementową zbioru n-elementowego, gdzie $k, n \in \mathbb{N}_+$ oraz $k \leq n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru.

{ Uwaga }

W kombinacjach kolejność elementów nie jest istotna. Podzbiory $\{1, 2\}$ i $\{2, 1\}$ są tymi samymi podzbiorami składającymi się z liczb 1 i 2.

W dalszej części książki liczbę k-elementowych kombinacji n-elementowego zbioru będziemy oznaczać symbolem C_n^k.

Jeżeli ze zbioru zawierającego n elementów wybieramy k elementów $(k \leq n)$, w ten sposób, że:

- nieistotna jest kolejność wybieranych elementów,
- wybierane elementy nie mogą się powtarzać,

to w ten sposób budujemy k-wyrazową kombinację tego zbioru.

Do obliczenia liczby k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wygodnie jest używać symbolu Newtona.

Niech k i n będą liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq n$. Wówczas $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Wyrażenie $\binom{n}{k}$ nazywamy symbolem Newtona.

Przykład 7.

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{1}{1} = 1$$

{ Uwaga }

Można zauważyć, że $\binom{n}{0} = 1$ oraz $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$.

Jeżeli $k, n \in \mathbb{N}_+$ oraz $k \leq n$, to liczba wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego jest równa: *Twierdzenie*

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Przykład 8.

Obliczmy, na ile sposobów możemy wybrać trzy karty z talii liczącej 52 karty. Najpierw zauważamy, że kolejność wyboru kart nie jest istotna. Do opisu takiej sytuacji nie możemy więc używać ciągów, lecz zbiorów. Powstaje pytanie, ile istnieje trzyelementowych podzbiorów zbioru 52-elementowego. Każdy trzyelementowy zbiór jest trzyelementową kombinacją, czyli $C_{52}^3 = \binom{52}{3} = \frac{52!}{3! \cdot 49!} = \frac{50 \cdot 51 \cdot 52}{6} = 22100$.

Przykład 9.

Zestaw pytań na egzamin z matematyki zawiera 20 pytań z geometrii, 30 pytań z algebry i 10 pytań z rachunku prawdopodobieństwa. Obliczmy, na ile sposobów student może wylosować trzy pytania tak, by były tam dwa pytania z algebry i jedno z geometrii lub trzy pytania z algebry.

Trzy pytania z algebry stanowią trzyelementowy podzbiór zbioru 30-elementowego. Takich wyborów jest $C_{30}^3 = \binom{30}{3} = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{6} = 4060$. Alternatywnie dwa pytania z algebry i jedno z geometrii wybieramy na $\binom{30}{2} \cdot \binom{20}{1} = \frac{30!}{2! \cdot 28!} \cdot \frac{20!}{1! \cdot 19!} = \frac{29 \cdot 30}{2} \cdot 20 = 8700$ sposobów. Razem szukanych wyborów jest $n = 4060 + 8700 = 12760$.

Ćwiczenie 4.

Ile meczów rozegra 12 drużyn, grając jednokrotnie systemem „każdy z każdym" jeden mecz?

Zauważmy, że zagadnienie obliczania liczby kombinacji pokrywa się z zagadnieniem obliczania liczby k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego omówionym w poprzednim rozdziale. Możemy więc zamiast podanych wzorów stosować metodę tam opisaną.

{ Uwaga }

Ze zbioru n-elementowego możemy wybrać $\binom{n}{k}$ podzbiorów k-elementowych.

Zadania

1 Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występują cyfry 7 i 2?

2 Oblicz, ile jest wszystkich:

a) liczb czterocyfrowych,
b) liczb dwucyfrowych o niepowtarzających się cyfrach,
c) liczb trzycyfrowych o niepowtarzających się cyfrach,
d) liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach.

3 Oblicz, ile jest podzbiorów zbioru n-elementowego.

4 Na szczyt pewnej góry wiedzie pięć szlaków. Na ile sposobów można wejść i zejść z góry, jeśli:

a) możemy wracać tym samym szlakiem?
b) nie możemy wracać tym samym szlakiem?

5 Na ile sposobów 10 osób może wysiąść z tramwaju, który zatrzymuje się na 5 przystankach?

6 Na ile sposobów 7 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na 20 piętrach?

7 Są dwa rodzaje skrzynek pocztowych: czerwone i niebieskie. Na ile sposobów można wrzucić do nich 10 listów?

8 Na zawodach w gimnastyce artystycznej sędziuje 6 sędziów. Każdy sędzia wystawia zawodnikowi notę od 0 do 10, z dokładnością do 0,1 punktu. Oblicz, ile różnych werdyktów (wyników w punktach) może wydać cała sześcioosobowa komisja.

9 W turnieju piłkarskim bierze udział 8 drużyn. Turniej odbywa się systemem „każdy z każdym". Każda gra może się skończyć dla danej drużyny wygraną, remisem bądź porażką. Ile jest różnych możliwych wyników turnieju, jeśli przyjmiemy, że „wynik turnieju" to ostateczny zapis w tabeli spotkań?

10 Ile liczb sześciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, w których na miejscu jedności jest cyfra 3 lub 4?

11 Ile można utworzyć dziewięciocyfrowych numerów telefonicznych, w których żadna cyfra się nie powtórzy, przy założeniu, że numer nie może zaczynać się od 0?

12 Rozstrzygnij, przyjmując, że alfabet składa się z 24 liter, czy wśród 600 osób muszą się znaleźć dwie, które mają takie same dwuliterowe inicjały.

13 Ustaw w kolejności od największej do najmniejszej: W_3^5, W_5^3, V_5^3.

14 Na ile sposobów można ustawić 12 osób w kolejce?

15 Na ile sposobów można ustawić 4 chłopców i 2 dziewczynki w kolejce, tak aby dziewczynki nie stały obok siebie?

16 Układając kule z narysowanymi na nich cyframi 3, 4, 5, 6, 7, można utworzyć różne liczby pięciocyfrowe. Ile jest liczb większych od 70 000?

17 W grupie sześcioosobowej są trzy siostry. Na ile sposobów można ustawić te osoby, tak aby siostry stały obok siebie?

18 Na ile sposobów można wybrać trzyosobową delegację z 30-osobowej klasy?

19 Grupa studencka liczy 20 osób, w tym 8 kobiet. Na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację składającą się z:

a) 2 mężczyzn i 2 kobiet? b) 1 mężczyzny i 3 kobiet?

20 Ile można wyznaczyć odcinków, jeśli każdy odcinek ma końce w wierzchołkach ośmiokąta wypukłego?

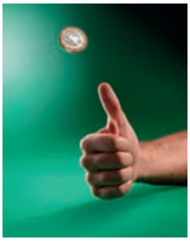
21 Na ile sposobów można wybrać 6 liczb spośród 49?

22 W turnieju szachowym, w którym każdy zawodnik gra z każdym jeden raz, rozegrano 21 partii. Ilu szachistów brało udział w turnieju?

23 Na ile sposobów można rozmieścić m rozróżnialnych kul w m ponumerowanych urnach, tak aby co najmniej jedna urna była pusta?

1.3. Zdarzenia losowe

Przykład 1.



a) W wyniku rzutu monetą może wypaść orzeł (O) lub reszka (R), ale nie jesteśmy w stanie przewidzieć, który z wyników wypadnie w konkretnym rzucie.
b) Rzucając kostką do gry, można otrzymać różną liczbę oczek. Tu także nie wiemy, który z wyników wypadnie w konkretnym rzucie.

Opisane powyżej doświadczenia charakteryzują się tym, że możemy je wielokrotnie powtarzać, znamy zbiór możliwych wyników tych doświadczeń, ale nie możemy przewidzieć konkretnego wyniku. Takie doświadczenia nazywamy doświadczeniami losowymi.

Definicja

Zbiór wszystkich możliwych wyników danego doświadczenia losowego nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych i zwyczajowo oznaczamy literą Ω. Każdy jednoelementowy podzbiór zbioru Ω nazywamy zdarzeniem elementarnym.

W przykładzie 1a przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z dwóch wyników: wypadł orzeł, wypadła reszka, co zapisujemy symbolicznie $\Omega = \{O, R\}$. W przykładzie 1b $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Przykład 2.

Doświadczenie losowe	Zdarzenia elementarne
Rzut monetą	O, R
Trzykrotny rzut monetą Zapis (O, O, R) oznacza wynik doświadczenia, w którym w dwóch pierwszych rzutach otrzymaliśmy orła, a w trzecim rzucie reszkę.	(O, O, O); (O, O, R); (O, R, O); (R, O, O); (R, R, O); (R, O, R); (O, R, R); (R, R, R)
Dwukrotny rzut kostką Zapis (2, 3) oznacza wynik doświadczenia, w którym w pierwszym rzucie otrzymaliśmy dwa oczka, a w drugim rzucie trzy oczka.	(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6).

Ćwiczenie 1.

Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne przy jednoczesnym jednokrotnym rzucie monetą i kostką.

Definicja

Każdy podzbiór skończonego zbioru zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem.

Jeżeli $A \subset \Omega$ jest zdarzeniem i $a \in A$, to zdarzenie $\{a\}$ nazywamy zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A.

Definicja

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych.

Zbiór pusty (zdarzenie, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne) nazywamy zdarzeniem niemożliwym.

Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem pewnym.

Jeżeli nie istnieje żadne zdarzenie elementarne, które sprzyja jednocześnie zdarzeniom A i B (tzn. $A \cap B = \varnothing$), to mówimy, że zdarzenia A i B wykluczają się.

Jeżeli każde zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A sprzyja zdarzeniu B (tzn. $A \subset B$), to mówimy, że zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B.

Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A.

Przykład 3.

Losujemy dwie karty z talii zawierającej 52 karty.

Zdarzenie „wylosowano dwie dwójki kier" jest zdarzeniem niemożliwym.

Zdarzenie „jedna z wylosowanych kart jest kierem lub pikiem, lub treflem, lub karem" jest zdarzeniem pewnym.

Zdarzenia „wylosowanie dwójki i trójki" i „wylosowanie dwóch asów" są zdarzeniami wykluczającymi się.

Zdarzenie „wylosowano króla kier i króla karo" pociąga za sobą zdarzenie „wylosowano dwa króle".

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia „co najmniej jedna z wylosowanych kart jest królem" jest zdarzenie „żadna z wylosowanych dwóch kart nie jest królem".

{ Uwaga }

Talia kart składa się z 52 kart do gry. Wśród nich znajdują się 4 kolory po 13 kart, są to: pik, kier, karo, trefl.
W każdym kolorze są karty ponumerowane od 2 do 10, zwane blotkami, i figury: walet, dama, król i as.

Ćwiczenie 2.

Z urny zawierającej trzy kule oznaczone numerami 2, 4, 6 losujemy kolejno trzy kule. Zapisane w kolejności losowania numery kul tworzą liczbę trzycyfrową. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

a) wylosowanej kuli nie zwracamy do urny;
b) wylosowaną kulę zwracamy do urny.

Jeżeli zbiór zdarzeń elementarnych składa się z n elementów, to wszystkich zdarzeń losowych jest 2^n (patrz zadanie 3., strona 22).

Zadania

1 Rzucamy dwa razy kostką do gry. Wypisz wyniki sprzyjające poniższym zdarzeniom.

a) Suma oczek jest równa co najmniej 5.
b) Suma oczek jest równa co najwyżej 9.
c) Iloczyn oczek jest liczbą parzystą.

2 Rzucamy jednocześnie monetą i kostką. Wypisz wyniki sprzyjające poniższym zdarzeniom.

a) Wypadła liczba parzysta.
b) Wypadł orzeł.
c) Wypadły reszka i parzysta liczba oczek.

3 Spośród liczb $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ losujemy ze zwracaniem dwie z nich i otrzymaną parę wyników traktujemy jako współrzędne punktu w układzie współrzędnych. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniu, w którym punkt znajduje się w II ćwiartce układu współrzędnych.

4 Z urny, w której znajduje się sześć kul ponumerowanych od 1 do 6, wylosowano kolejno dwie z nich bez zwracania. Wypisz wyniki sprzyjające poniższym zdarzeniom.

a) Za pierwszym razem wylosowano liczbę parzystą.
b) Iloczyn wylosowanych liczb jest równy 2.
c) Pierwsza wylosowana liczba jest większa od drugiej.

5 Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, w którym przy czterokrotnym rzucie monetą wyrzucono dokładnie jeden raz orła.

6 Rzucamy jednocześnie trzema monetami o nominałach 1 zł, 2 zł, 5 zł. Wypisz wszystkie możliwe zdarzenia elementarne.

7 Ze zbioru liczb od 1 do 8 losujemy kolejno bez zwracania dwie z nich. Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych polegających na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest parzysty.

8 W urnie znajdują się kule: biała, czarna i zielona. Losujemy kolejno bez zwracania trzy kule. Zapisz zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu, w którym wylosowano kulę czarną za drugim razem.

9 Rzucono dwukrotnie symetryczną kostką do gry. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu przeciwnemu do zdarzenia, w którym wyrzucono co najmniej raz nieparzystą liczbę oczek.

10 Do celu oddano cztery strzały, z których co najmniej jeden był celny. Niech A_i oznacza zdarzenie losowe polegające na trafieniu do celu w i-tym strzale $(i = 1, 2, 3, 4)$. Zapisz za pomocą działań na zdarzeniach A_i zdarzenie przeciwne do zdarzenia „trafiono do celu za pierwszym bądź drugim razem".

11 Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ losowo wybrano jedną. Oznaczmy zdarzenia: A — wybrano liczbę nieparzystą, B — wybrano liczbę podzielną przez 3, C — wybrano liczbę parzystą. Określ, które ze zdarzeń wykluczają się wzajemnie.

12 Z urny, w której znajdują się kule: biała, zielona, czarna, losujemy kolejno trzy kule, zwracając po każdym losowaniu kulę do urny. Oznaczmy zdarzenia: A — wylosowano co najmniej raz kulę białą, B — wylosowano dokładnie raz kulę zieloną, C — za każdym razem wylosowano kulę białą. Określ, które zdarzenia wykluczają się.

1.4. Prawdopodobieństwo klasyczne

Wiemy już, że nie da się przewidzieć jednoznacznie, czy w przeprowadzonym jednokrotnie doświadczeniu losowym wystąpi dane zdarzenie. Jednak niektóre zdarzenia zachodzą częściej niż inne. W XVIII wieku francuski filozof G.L. Buffon rzucił monetą 4040 razy i stwierdził, że w 2048 rzutach otrzymał orła. Częstość względna wystąpienia tego zdarzenia wyniosła $\frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069$. Później inni naukowcy podjęli podobne próby i otrzymali częstości, odpowiednio: 0,5016, 0,5005, 0,5027. Gdy wykonamy długą serię rzutów kostką, to zauważymy, że częstość zdarzenia A (wypadnięcie nieparzystej liczby oczek) zbliża się do $\frac{1}{2}$, natomiast częstość zdarzenia B (wyrzucenie 6 oczek) zbliża się do $\frac{1}{6}$. Stwierdzamy więc, że zdarzenie A zachodzi częściej niż zdarzenie B. Mówimy wtedy, że zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne niż zdarzenie B. Ten sposób oszacowania szansy wystąpienia jakiegoś zdarzenia jest bardzo żmudny i niedoskonały, stąd wprowadzenie jego modyfikacji w postaci klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo jest tu teoretycznym odpowiednikiem częstości względnej.

{ Uwaga }

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznaczamy symbolem Ω, liczbę elementów w tym zbiorze symbolem $|\Omega|$, natomiast liczbę zdarzeń elementarnych w zbiorze A symbolem $|A|$.

Jeśli rzucamy symetryczną monetą, to otrzymanie każdego wyniku jest jednakowo możliwe. Podobna sytuacja jest przy rzucie symetryczną kostką czy losowaniu karty z talii kart.

W dalszej części rozważań będziemy zawsze zakładali, że przestrzeń zdarzeń elementarnych jest zbiorem niepustym i składa się ze skończonej liczby zdarzeń elementarnych jednakowo możliwych.

Definicja

Załóżmy, że Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, która składa się ze skończonej liczby zdarzeń jednakowo możliwych. Niech A będzie wybranym zdarzeniem tej przestrzeni. Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy liczbę $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}, \left(|\Omega|\neq 0\right)$.

Przykład 1.

Obliczmy prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek większej od 2 przy jednokrotnym rzucie kostką.

Wypiszmy elementy przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A, w którym wypadła liczba oczek większa niż 2, tj. $A=\{3, 4, 5, 6\}$.
Zatem:

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ćwiczenie 1.

Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednego orła przy trzykrotnym rzucie monetą.

Własności prawdopodobieństwa

1. $P(\emptyset)=0$ i $P(\Omega)=1$ (prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0; prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1).
2. Jeżeli $A\subset\Omega$, to $0\leq P(A)\leq 1$ (prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest liczbą nieujemną mniejszą bądź równą 1).
3. Jeżeli $A\subset\Omega$ i $A'=\Omega\setminus A$, to $P(A')=1-P(A)$ (prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A jest równe różnicy liczby 1 i prawdopodobieństwa zdarzenia A).
4. Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń wykluczających się jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Dowód punktów 1. i 2. wynika wprost z definicji prawdopodobieństwa i zostawiamy go Czytelnikowi (zadania 4, 5).

Dowód punktu 3. Niech $|\Omega| = n$, $|A| = k$, wówczas $|A'| = n - k$. Z definicji prawdopodobieństwa wynika, że $P(A') = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(A)$.

Dowód punktu 4. Niech $|\Omega| = n$, $|A| = k$, $|B| = l$. Ponieważ zdarzenia A i B wykluczają się, więc zbiory A i B są rozłączne, wówczas $|A \cup B| = |A| \cup |B| = k + l$. Mamy więc

$$P(A \cup B) = \frac{k+l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} = P(A) + P(B).$$

Przykład 2.

Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia A, w którym przy dziesięciokrotnym rzucie monetą wypadł co najmniej jeden raz orzeł.

Zauważmy, że wszystkich możliwych zdarzeń jest $|\Omega| = 2^{10} = 1024$. Dość kłopotliwe jest wyliczenie liczby zdarzeń sprzyjających rozważanemu zdarzeniu i dlatego rozpatrzmy zdarzenie przeciwne A' (w dziesięciu rzutach monetą ani razu nie wypadł orzeł). Zauważmy, że $A' = \{(R, R, R, R, R, R, R, R, R, R)\}$, zatem $|A'| = 1$, a stąd $P(A') = \frac{1}{1024}$. Z własności 3. wynika więc, że $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$.

Zadania

1 Rzucamy jednocześnie dwiema symetrycznymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

a) A — suma wyrzuconych oczek wynosi 1.
b) B — suma oczek na obu kostkach jest mniejsza od 20.
c) C — suma oczek na obu kostkach wynosi co najwyżej 8.

2 Rzucamy czterema monetami o nominałach: 10 gr, 20 gr, 50 gr, 1 zł. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) A — wypadło tyle samo orłów, co reszek.
b) B — wypadł co najmniej jeden orzeł.
c) C — wypadły same reszki.

3 Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

a) A — wylosowano damę.
b) B — wylosowano kier.
c) C — wylosowano siódemkę pik.
d) D — wylosowano króla lub asa.

4 Uzasadnij twierdzenie, że prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego wynosi 1, a zdarzenia niemożliwego 0.

5 Uzasadnij twierdzenie, że prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest liczbą z przedziału $\langle 0,1\rangle$.

6 Rzucamy trzykrotnie monetą pięciozłotową. Oblicz prawdopodobieństwo poniższych zdarzeń.

a) A — wypadł co najmniej jeden orzeł.
b) B — wypadła co najwyżej jedna reszka.
c) C — wypadły dokładnie dwa orły.
d) D — wypadły same reszki.

7 Z urny zawierającej 9 kul czarnych i 4 białe losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul będą:

a) A — 3 kule czarne.
b) B — dwie kule białe i jedna czarna.
c) C — jedna kula biała i dwie czarne.

8 W trzydziestoosobowej klasie, w której jest 12 dziewcząt, wylosowano 4 osoby, które otrzymały bilety do teatru. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych osób połowę stanowią chłopcy.

9 Piotr i Agata postanowili zagrać w grę losową polegającą na tym, że Piotr rzuca dwa razy monetą. Jeśli choć raz wypadnie orzeł, to wygrywa Agata, a jeśli ani razu, to wygrywa Piotr. Oblicz prawdopodobieństwo zwycięstwa każdego z nich.

10 Z talii 52 kart wyciągnięto dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch króli.

11 Test z matematyki składa się z 10 pytań jednokrotnej odpowiedzi a) lub b). Test zaliczymy, gdy poprawnie odpowiemy na co najmniej 6 pytań. Oblicz prawdopodobieństwo zaliczenia testu, gdy wszystkie odpowiedzi zaznaczamy systemem chybił trafił.

12 Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia jednakowej liczby oczek przy rzucie trzema kostkami do gry.

13 Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia fula przy rzucie pięcioma kostkami do gry w kości, wiedząc, że fulem nazywamy wyrzucenie na dwóch kostkach a oczek, na każdej z trzech pozostałych b oczek, przy czym $a \neq b$.

14 Rzucamy 9 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej dwa razy wyrzucimy reszkę.

15 Ze zbioru czterech cyfr $\{1, 2, 3, 4\}$ wylosowano bez zwracania trzy cyfry i utworzono z nich liczbę trzycyfrową, ustawiając je w kolejności losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo utworzenia liczby większej od 300?

16 Ustawiono w ciąg n kul oznaczonych liczbami 1, 2, …, n. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym kule 4 i 5 znajdą się obok siebie.

*1.5. Własności prawdopodobieństwa

Twierdzenie

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych i $A \subset B \subset \Omega$. Wówczas $P(A) \le P(B)$.

Jeżeli $A \subset B \subset \Omega$, to $|A| \le |B|$, czyli $\frac{|A|}{|\Omega|} \le \frac{|B|}{|\Omega|}$, stąd $P(A) \le P(B)$.

Twierdzenie

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych i $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$. Jeżeli zdarzenia losowe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wykluczają się parami, to prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń równe jest sumie ich prawdopodobieństw:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Twierdzenie to zostało udowodnione w poprzednim rozdziale dla dwóch zbiorów.

Łatwy dowód tego twierdzenia dla n zbiorów pozostawiamy czytelnikowi do samodzielnego rozpatrzenia.

Przykład 1.

W urnie znajduje się 5 kul biało-czerwonych, 2 kule biało-czarne, 4 kule czerwono-czarne i 3 kule czerwone. Wprowadźmy oznaczenia zdarzeń:

A — wylosowano kulę dwukolorową;
B_1 — wylosowano kulę biało-czerwoną;
B_2 — wylosowano kulę biało-czarną;
B_3 — wylosowano kulę czerwono-czarną;
B_4 — wylosowano kulę czerwoną.

Możemy obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kuli dwukolorowej:

$$P(A) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{5}{14} + \frac{2}{14} + \frac{4}{14} = \frac{11}{14}.$$

Twierdzenie

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych i $A, B \subset \Omega$. Wówczas

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich iloczynu.

Ponieważ zdarzenia losowe są zbiorami, w dowodzie będziemy stosować pewne prawa rachunku zbiorów.

Zauważmy, że $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ oraz że zbiory A i $B \setminus A$ są rozłączne (czyli zdarzenia A i $B \setminus A$ wykluczają się).

Także $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ oraz zbiory $A \cap B$ i $B \setminus A$ są rozłączne (czyli odpowiednie zdarzenia wykluczają się).

Z własności prawdopodobieństwa wynika więc, że

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$ oraz $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$,

czyli

(2) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

Podstawiając (2) do (1), otrzymujemy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Przykład 2.

Z talii 52 kart wyciągnięto jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest ona królem lub treflem.

Oznaczmy zdarzenia: A — wyciągnięta karta jest królem, B — wyciągnięta karta jest treflem. Mamy obliczyć $P(A \cup B)$.

Przy założeniu, że wyciągnięcie każdej karty jest jednakowo prawdopodobne, mamy $P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.

Zatem $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$.

Przykład 3.

Niech A i B będą takimi zdarzeniami, że $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Obliczmy $P(B)$ i $P(A \setminus B)$.

Ponieważ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, więc $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{6}$.

Stąd $P(B) = \frac{2}{3}$.

Zauważmy, że $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. Zdarzenia $A \cap B$ i $A \setminus B$ wykluczają się,

więc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$, czyli $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + P(A \setminus B)$. Stąd $P(A \setminus B) = \frac{1}{6}$.

Przykład 4.
Udowodnijmy, że jeśli $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A) = P(B')$, to $P(A \cup B) \geq \frac{1}{2}$.

Ponieważ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 1 - P(B') - P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B),$$

więc:

(1) $P(A \cup B) + P(A \cap B) = 1$.

Ponieważ $A \cap B \subset A \cup B$, to $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$. Gdyby $P(A \cup B) < \frac{1}{2}$,

to $P(A \cap B) < \frac{1}{2}$ i równość (1) byłaby nieprawdziwa. Wynika stąd, że $P(A \cup B) \geq \frac{1}{2}$.

Przykład 5.
W turnieju piłkarskim uczestniczy 14 drużyn, które rozdziela się losowo na dwie grupy po 7 drużyn w każdej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia tego, że drużyna A oraz B są w różnych grupach.

Aby dwie ustalone drużyny A i B znalazły się w różnych grupach, należy wybrać po 6 drużyn z pozostałych 12 na $\binom{12}{6}$ sposobów i dołączyć do nich odpowiednio drużyny A i B. Ponieważ ważne są tylko składy grup, więc takich podziałów jest $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \binom{12}{6}$. Analogicznie liczymy liczność zbioru zdarzeń elementarnych. Stąd

$$P = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \binom{12}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \binom{14}{7}} = \frac{2 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{13}.$$

Przykład 6.
W urnie znajduje się n kul, w tym n_1 kul białych i n_2 kul czarnych $(n = n_1 + n_2)$. Losujemy bez zwracania (np. jednocześnie) k kul. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul jest k_1 kul białych i k_2 kul czarnych $(k = k_1 + k_2)$.

Zapiszmy rozkład kul w urnach i rozkład losowanych kul w następujący sposób:

$$n = \overset{\text{białe}}{n_1} + \overset{\text{czarne}}{n_2}$$
$$k = k_1 + k_2$$

Liczność zbioru Ω jest równa liczbie k-elementowych kombinacji ze zbioru n-elementowego, tj. $\binom{n}{k}$. Liczność zdarzenia, którego prawdopodobieństwo obliczamy, jest równa $\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}$, gdyż ze zbioru n_1 kul białych losujemy k_1 kul białych, co można zrobić na $\binom{n_1}{k_1}$ sposobów, oraz ze zbioru n_2 kul czarnych losujemy k_2 kul czarnych, co można zrobić na $\binom{n_2}{k_2}$ sposobów. Następnie każdy podzbiór kul białych łączymy z każdym podzbiorem kul czarnych. Szukane prawdopodobieństwo wynosi więc

$$P = \frac{\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}.$$

Schemat losowania można uogólnić np. na trzy rodzaje kul: białe, czarne, zielone.

Mamy:

$$n = \overset{\text{białe}}{n_1} + \overset{\text{czarne}}{n_2} + \overset{\text{zielone}}{n_3}$$
$$k = k_1 + k_2 + k_3$$

Wówczas:

$$P = \frac{\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\binom{n_3}{k_3}}{\binom{n}{k}}$$

Zadania

1 Rzucamy kostką 4 razy. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, w którym choć raz wypadnie jedynka?

2 Z urny zawierającej 2 kule białe i 6 czerwonych losujemy ze zwracaniem 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej jedna z nich będzie biała.

3 Z urny zawierającej dwa razy więcej kul białych niż czarnych losujemy n razy po jednej kuli, zwracając za każdym razem kulę do urny. Dla jakiej wartości n prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej raz kuli białej jest większe od 0,9?

4 Niech Ω będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych i $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, wiedząc, że $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{3}{4}$.

SKOROWIDZ

L

M

N

O

P

R

S

Ś

T

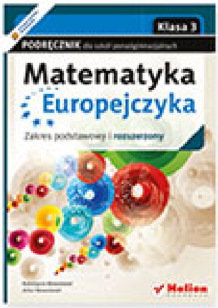
W

Z

Liczby rządzą światem (Pitagoras)

Trzecia klasa szkoły średniej to ostatni krok do egzaminu dojrzałości i wielkiej rewolucji w życiu. Bez względu na to, czy zdecydujesz się na dalsze kształcenie na studiach wyższych, czy postanowisz od razu rozpocząć karierę zawodową, matematyka nie opuści Cię... nigdy. Jest niezbędna dla „ścisłowców", ale stanowi też integralną część nauk humanistycznych (koniec z wymówkami, że humaniści nie rozumieją świata liczb!). Wykorzystujesz ją przy wypełnianiu kuponu lotka, obserwowaniu gwiazd, tworzeniu muzyki i dowolnym innym działaniu wymagającym logicznego myślenia. A do tego stanowi obowiązkowy przedmiot na maturze! Dlatego też przygotowany dla Ciebie podręcznik z serii *Matematyka Europejczyka* ułatwia zarówno opanowanie wymaganych umiejętności, jak i wykorzystanie ich w praktyce. Zestawy zadań testowych i otwartych pomogą Ci przygotować się do matury. Ponadto każdy dział kończy się ciekawą lekcją spoza podstawy programowej. Podręcznik dodatkowo przedstawia zagadnienia badawcze, czasem pozornie mające niewiele wspólnego z matematyką, lecz pozwalające rozwijać myślenie matematyczne.

Kompletny zestaw Matematyka Europejczyka. Klasa 3
stanowią: **podręcznik** + **zbiór zadań** + **płyta DVD**.



Seria podręczników, zbiorów zadań i płyt *Matematyka Europejczyka* wydawnictwa Helion pozwala uczniom zdobywać wiedzę bez stresu, a nauczycielom ułatwia przekazywanie nowego materiału w interesujący i niebanalny sposób.

Matematyka Europejczyka – TO SIĘ LICZY!

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
http://helion.pl

ISBN 978-83-246-2410-2