

PODRĘCZNIK dla szkół ponadgimnazjalnych

# Matematyka

# Europejszczyka

Zakres podstawowy i **rozszerzony**

Katarzyna Nowoświat  
Artur Nowoświat

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. Mariana Liskowskiego, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr. Jarosława Pacuły.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony

Etap edukacyjny: IV.

Typ szkoły: szkoły ponadgimnazjalne.

Rok dopuszczenia 2013.

**Numer ewidencyjny w wykazie: 521/2/2013**

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autorzy oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autorzy oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Joanna Zaręba

Projekt okładki: ULABUKA

Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.

Wydawnictwo HELION

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)

WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://helion.pl/user/opinie?mepod2>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-2406-5

Copyright © Helion 2013

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

# Spis treści

Od autorów .....	7
<b>1. Wielomiany .....</b>	<b>9</b>
1.1. Ogólna postać wielomianu .....	10
Równość wielomianów .....	12
*1.2. Działania w zbiorze wielomianów .....	13
Dodawanie i odejmowanie wielomianów .....	13
Mnożenie wielomianu przez wielomian .....	13
*1.3. Dzielenie wielomianu przez dwumian $ax + b$ .....	17
1.4. Rozkład wielomianu na czynniki (1) .....	21
Rozkład wielomianu stopnia drugiego na czynniki .....	21
Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia .....	22
*1.5. Rozkład wielomianu na czynniki (2) .....	23
Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias .....	23
Grupowanie wyrazów .....	23
Stosowanie wzorów skróconego mnożenia .....	24
1.6. Równania wielomianowe (1) .....	26
*1.7. Równania wielomianowe (2) .....	28
*1.8. Nierówności wielomianowe .....	32
1.9. Spoza podstawy programowej — wykresy funkcji wielomianowej .....	36
1.10. Z zastosowań matematyki .....	38
Temat badawczy: przybliżone rozwiązywanie równań wielomianowych ...	38
1.11. Prosto do matury .....	39
<b>2. Wyrażenia wymierne .....</b>	<b>45</b>
*2.1. Wyrażenia wymierne i działania na nich .....	46
Dziedzina wyrażenia wymiernego .....	46
Upraszczanie i rozszerzanie wyrażeń wymiernych .....	47
Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych .....	48
Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych .....	48
2.2. Proporcjonalność odwrotna .....	52
2.3. Wykres proporcjonalności odwrotnej .....	54
2.4. Równania wymierne .....	56

*2.5. Nierówności wymierne . . . . .	58
2.6. Spoza podstawy programowej — funkcja homograficzna . . . . .	60
2.7. Z zastosowań matematyki . . . . .	62
Temat badawczy nr 1 . . . . .	62
Temat badawczy nr 2 . . . . .	62
2.8. Prosto do matury . . . . .	63
<b>3. Wykres i zastosowania funkcji wykładniczej i logarytmicznej . . . . .</b>	<b>69</b>
3.1. Funkcja wykładnicza i jej wykres . . . . .	70
*3.2. Funkcja logarytmiczna . . . . .	76
3.3. Spoza podstawy programowej — skala logarytmiczna . . . . .	80
3.4. Z zastosowań matematyki . . . . .	81
Temat badawczy nr 1 . . . . .	81
Temat badawczy nr 2 . . . . .	82
3.5. Prosto do matury . . . . .	82
<b>4. Funkcje trygonometryczne . . . . .</b>	<b>87</b>
4.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym — powtórzenie wiadomości . . . . .	88
4.2. Funkcje trygonometryczne kąta o mierze z przedziału $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ . . . . .	89
Znaki funkcji trygonometrycznych . . . . .	92
Podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi . . . . .	92
Wzory redukcyjne . . . . .	93
*4.3. Miary kąta . . . . .	94
*4.4. Funkcje trygonometryczne kątów płaskich . . . . .	98
Znaki funkcji trygonometrycznych . . . . .	99
*4.5. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej . . . . .	101
Okresowość funkcji trygonometrycznych . . . . .	103
*4.6. Wzory redukcyjne . . . . .	104
*4.7. Wykresy funkcji trygonometrycznych . . . . .	107
Wykres funkcji $f(x) = \sin x$ . . . . .	108
Własności funkcji $f(x) = \sin x$ . . . . .	108
Wykres funkcji $f(x) = \cos x$ . . . . .	109
Własności funkcji $f(x) = \cos x$ . . . . .	110
Wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ . . . . .	110
Własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ . . . . .	111

*4.8. Rozwiązywanie niektórych równań i nierówności sposobem graficznym . . . . .	112
*4.9. Podstawowe tożsamości trygonometryczne . . . . .	122
Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów . . . . .	122
Sinus i cosinus podwojonego kąta oraz jedynka trygonometryczna . . . . .	123
Suma i różnica sinusów i cosinusów . . . . .	124
*4.10. Równania i nierówności trygonometryczne . . . . .	125
Rozwiązywanie równań metodą wprowadzenia pomocniczej niewiadomej . . . . .	125
Rozwiązywanie równań z wykorzystaniem podstawowych tożsamości . . . . .	126
Rozwiązywanie nierówności trygonometrycznych metodą wprowadzenia pomocniczej niewiadomej . . . . .	127
4.11. Spoza podstawy programowej — harmoniki . . . . .	128
4.12. Z zastosowań matematyki . . . . .	130
Temat badawczy nr 1 . . . . .	130
Temat badawczy nr 2 . . . . .	131
4.13. Prosto do matury . . . . .	131
<b>5. Ciągi . . . . .</b>	<b>137</b>
5.1. Pojęcie ciągu liczbowego . . . . .	138
*5.2. Ciągi określone wzorem rekurencyjnym . . . . .	142
*5.3. Granice ciągów . . . . .	143
5.4. Ciąg arytmetyczny . . . . .	148
5.5. Suma wyrazów ciągu arytmetycznego . . . . .	150
5.6. Ciąg geometryczny . . . . .	153
5.7. Suma $n$ wyrazów ciągu geometrycznego . . . . .	156
*5.8. Szereg geometryczny zbieżny . . . . .	158
5.9. Spoza podstawy programowej — zasada indukcji matematycznej . . . . .	161
5.10. Z zastosowań matematyki . . . . .	164
Temat badawczy nr 1 . . . . .	164
Temat badawczy nr 2 . . . . .	165
5.11. Prosto do matury . . . . .	165
<b>6. Planimetria . . . . .</b>	<b>171</b>
6.1. Kąty w okręgu . . . . .	172
6.2. Okręgi styczne i styczne do okręgów . . . . .	176

6.3. Trójkąty i czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu . . . .	181
Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu . . . . .	181
*Czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu . . . . .	183
*6.4. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów . . . . .	186
Zastosowania twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów do rozwiązywania trójkątów . . . . .	189
*6.5. Jednokładność i podobieństwo . . . . .	192
6.6. Spoza podstawy programowej — obrót figury . . . . .	197
6.7. Z zastosowań matematyki . . . . .	198
Temat badawczy nr 1 . . . . .	198
Temat badawczy nr 2 . . . . .	199
6.8. Prosto do matury . . . . .	200
<b>7. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej . . . . .</b>	<b>207</b>
7.1. Punkt i odcinek w układzie współrzędnych . . . . .	208
*7.2. Wektory na płaszczyźnie . . . . .	211
Wektor i działania na wektorach . . . . .	211
Współrzędne wektorów . . . . .	215
7.3. Prosta w układzie współrzędnych . . . . .	219
7.4. Wzajemne położenie prostych w układzie współrzędnych . . . . .	223
*7.5. Własności prostych wyrażonych równaniami ogólnymi . . . . .	227
*7.6. Interpretacja graficzna nierówności liniowych w układzie współrzędnych . . . . .	229
*7.7. Okrąg i koło w układzie współrzędnych . . . . .	232
7.8. Symetria osiowa i symetria środkowa . . . . .	236
7.9. Spoza podstawy programowej — iloczyn skalarny wektorów . . .	239
7.10. Z zastosowań matematyki . . . . .	242
Temat badawczy nr 1 . . . . .	242
Temat badawczy nr 2 . . . . .	243
7.11. Prosto do matury . . . . .	244
<b>Odpowiedzi . . . . .</b>	<b>249</b>
<b>Wzory . . . . .</b>	<b>275</b>
<b>Skorowidz . . . . .</b>	<b>279</b>
<b>Źródła . . . . .</b>	<b>285</b>

# 3.

## WYKRES I ZASTOSOWANIA FUNKCJI WYKŁADNICZEJ I LOGARYTMICZNEJ

Wiele zjawisk w przyrodzie można opisać za pomocą modelu wykładniczego. Są to między innymi:

- promieniotwórczość naturalna,
- wzrost bądź spadek liczebności populacji,
- stygnięcie ciał.

Kup ksi

Pole ksi

## 3.1. Funkcja wykładnicza i jej wykres



W pierwszej klasie omawialiśmy potęgi o wykładniku wymiernym. Nie będziemy dokładnie definiować potęgi o wykładniku niewymiernym. Oprzemy się tylko na stwierdzeniu, że liczba  $a^x$  dla każdej liczby dodatniej  $a$  i każdej liczby rzeczywistej  $x$  jest jednoznacznie określona.

### ✳ Przykład 1.

Rozpatrzmy potęgę  $3^{\sqrt{2}}$ .

Opis	Rozwiązanie
Rozpatrzmy kolejne przybliżenia dziesiętne liczby $\sqrt{2}$ z niedomiarem $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \dots)$ i nadmiarem $(w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, \dots)$ .	$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = 1,4 \\ w_2 = 1,41 \\ w_3 = 1,414 \\ w_4 = 1,4142 \\ w_5 = 1,41421 \\ \vdots \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w'_1 = 1,4 + 0,1 = 1,5 \\ w'_2 = 1,41 + 0,01 = 1,42 \\ w'_3 = 1,414 + 0,001 = 1,415 \\ w'_4 = 1,4142 + 0,0001 = 1,4143 \\ w'_5 = 1,41421 + 0,00001 = 1,41422 \\ \vdots \end{array} \right.$
Ponieważ liczby $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \dots$ oraz $w'_1, w'_2, w'_3, w'_4, w'_5, \dots$ są wymierne, to umiemy policzyć wartości potęg $3^{w_1}, 3^{w_2}, 3^{w_3}, 3^{w_4}, 3^{w_5}, \dots$ oraz $3^{w'_1}, 3^{w'_2}, 3^{w'_3}, 3^{w'_4}, 3^{w'_5}, \dots$	Znane nam są liczby: $3^{1,4}, 3^{1,41}, 3^{1,414}, 3^{1,4142}, 3^{1,41421}, \dots$ $3^{1,5}, 3^{1,42}, 3^{1,415}, 3^{1,4143}, 3^{1,41422}, \dots$
Kolejne przybliżenia liczby $3^{\sqrt{2}}$ z niedomiarem są coraz większe, a kolejne przybliżenia tej liczby z nadmiarem są coraz mniejsze.	$3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < 3^{1,4142} < 3^{1,41421} < \dots$ $3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} > 3^{1,4143} > 3^{1,41422} > \dots$
Różnice kolejnych przybliżeń są liczbami coraz bliższymi zera.	$3^{1,5} - 3^{1,4} \approx 0,5406$ $3^{1,42} - 3^{1,41} \approx 0,052$ $3^{1,415} - 3^{1,414} \approx 0,0052$ $3^{1,4143} - 3^{1,4142} \approx 0,0005$ $3^{1,41422} - 3^{1,41421} \approx 0,00005$
Można wykazać, że istnieje dokładnie jedna liczba $\alpha$ zawarta między liczbami $3^w$ i $3^{w'}$ , gdzie $w$ i $w'$ są dowolnymi liczbami wymiernymi takimi, że $w < \sqrt{2} < w'$ .	Liczba ta jest oznaczona symbolem $3^{\sqrt{2}}$ .

Można wykazać, że własności działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym są takie same jak w przypadku potęg o wykładniku wymiernym.

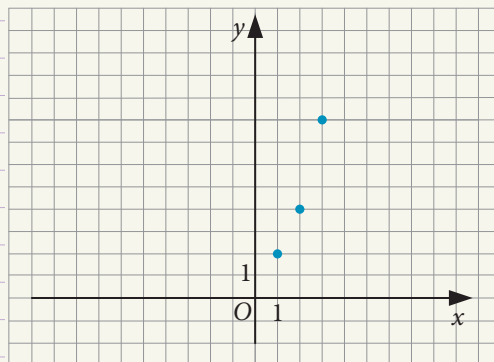


Pewna rozrastająca się populacja bakterii co dzień podwaja swą wielkość i po pewnym czasie liczy 2 miliony bakterii.

Niech  $y_0$  oznacza liczbę bakterii w chwili początkowej. Możemy zapisać, że po pierwszym dniu liczba bakterii będzie wynosiła  $2y_0$ , po dwóch dniach  $2^2 y_0$ , po trzech dniach  $2^3 y_0$  itd.

Zatem liczbę bakterii po  $x$  dniach można wyrazić wzorem  $y(x) = y_0 \cdot 2^x$ . W szczególnym przypadku, gdy  $y_0 = 1$ , tzn. gdy populację zapoczątkowała jedna bakteria, wzór ten ma postać  $y(x) = 2^x$ .

Wykres takiej funkcji wygląda następująco:



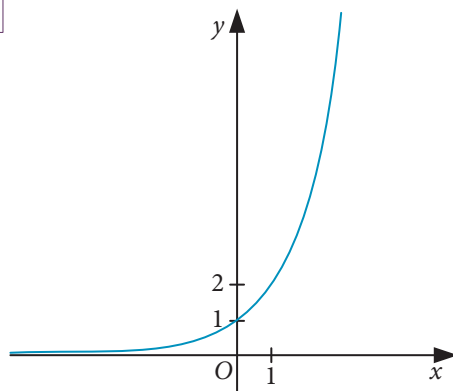
Rozważania z powyższego przykładu można uogólnić (patrz przykład 2.).

### ✳ Przykład 2.

Dana jest funkcja  $y(x) = 2^x$ , gdzie  $x$  jest liczbą rzeczywistą. Wykonajmy częściową tabelę wartości funkcji dla tych argumentów, dla których te wartości łatwo obliczyć, i naszkicujmy jej wykres.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Widzimy, że funkcja  $y(x) = 2^x$  jest rosnąca i dla  $x > 0$  wzrost wartości funkcji jest bardzo szybki. Mówimy, że funkcja ta ma wzrost typu wykładniczego, a wykres tej funkcji jest krzywą wykładniczą. Zauważmy, że jeśli podstawę 2 zastąpimy inną liczbą większą od 1, to ogólny kształt wykresu funkcji nie zmieni się.

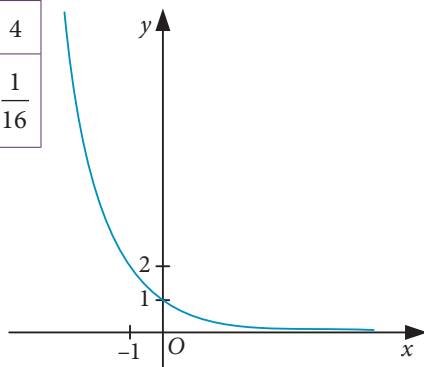


✳ **Przykład 3.**

Dana jest funkcja  $y(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  dla rzeczywistego argumentu  $x$ . Sporządźmy tabelę wybranych wartości funkcji i naszkicujmy jej wykres.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Widzimy, że funkcja  $y(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  jest malejąca. Mówimy, że maleje ona w sposób wykładniczy.



*Definicja*

Funkcję określoną wzorem

$$f(x) = a^x,$$

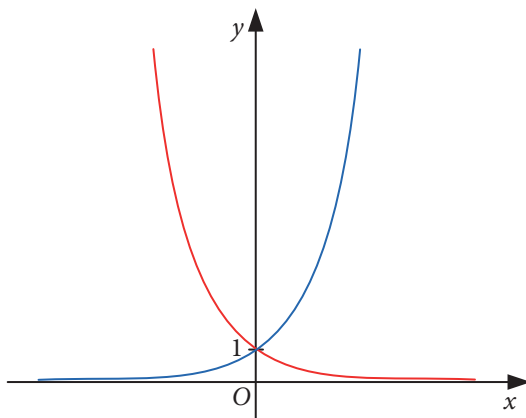
gdzie  $x \in \mathbb{R}$  oraz  $a > 0$  i  $a \neq 1$ , nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie  $a$ . Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

→ Dla  $0 < a < 1$  funkcja wykładnicza jest malejąca (wykres czerwony).

Dla  $a > 1$  funkcja wykładnicza jest rosnąca (wykres niebieski).

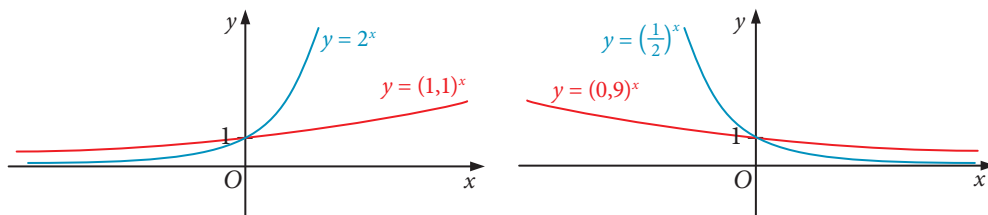
{ Uwaga }

Zastrzeżenie  $a \neq 1$  jest konieczne, ponieważ dla  $a = 1$  wzór  $y(x) = a^x$  definiuje funkcję stałą  $y(x) = 1$ , której nie zaliczamy do funkcji wykładniczych.



Wykresy funkcji  $y(x) = a^x$  i  $y(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ , gdzie  $a > 0$  i  $a \neq 1$ , są do siebie symetryczne względem osi  $Oy$ .

Rozważmy kilka przykładów wykresów funkcji wykładniczych.



→ Zbiorem wartości funkcji wykładniczej jest przedział  $(0, \infty)$ .

Oś  $Ox$  nazywamy asymptotą poziomą wykresu funkcji.

Funkcja wykładnicza przyjmuje każdą wartość dodatnią dokładnie jeden raz.

Wykres funkcji przecina oś  $Oy$  w punkcie o współrzędnych  $(0, 1)$ .



Korzystając z wykresów funkcji wykładniczej  $y = a^x$ , możemy rysować inne wykresy funkcji postaci  $y = a^x + b$ , przesuwając wykres funkcji wzdłuż osi  $Oy$  o  $b$  jednostek, czy też postaci  $y = a^{x-c}$ , przesuwając wykres funkcji równoległe do osi  $Ox$  o  $c$  jednostek.



Jedną z najbardziej wiarygodnych metod obliczania wieku różnych przedmiotów czy organizmów jest datowanie radiowęglowe. Metoda ta jest oparta na pomiarze proporcji między izotopem promieniotwórczym węgla  $^{14}\text{C}$  a izotopami trwałymi  $^{12}\text{C}$  i  $^{13}\text{C}$ . Opracował ją Willard Libby ze swoim zespołem w 1949 roku. Libby otrzymał Nagrodę Nobla w dziedzinie chemii w 1960 roku.

Wiadomo, że jeżeli substancja o masie  $N_0$  ma czas połowicznego rozpadu  $h$ , to masę pozostałą po czasie  $t$  obliczamy według wzoru  $N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ .

Czas połowicznego rozpadu izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  to około 5730 lat.

Dla przykładu rozważmy następującą sytuację: stwierdzono, że masa izotopu węgla  $^{14}\text{C}$  w znalezionym przez archeologów przedmiocie wynosi 80% masy wyjściowej. Sprawdźmy, sprzed ilu lat pochodzi ten przedmiot.

Z treści zadania wiemy, że  $N = 0,8N_0$ , zatem

$$0,8N_0 = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}, \quad 0,8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}},$$

$$\log 0,8 = \frac{t}{5730} \log \frac{1}{2}, \quad t = \frac{5730 \cdot \log 0,8}{\log 0,5}.$$

Znalezisko pochodzi więc sprzed około 1845 lat.

Czas (lata)	Względna ilość izotopu $^{14}\text{C}$
0	100,00%
1	99,99%
2	99,98%
10	99,88%
100	98,80%
500	94,14%
1000	88,62%
2000	78,54%
5000	54,67%
10 000	29,89%
50 000	0,24%

## Zadania



**1** Sporządź szablon wykresu funkcji  $y = 2^x$  i posługując się nim, naszkicuj wykres funkcji:

- a)  $y = 2^x + 1$       b)  $y = 2^x - 2$       c)  $y = 2^{x-2}$   
 d)  $y = 2^{x+2}$       e)  $y = 2^{x-3} + 1$       f)  $y = 3 - 2^x$   
 g)  $y = 2^{-x}$       h)  $y = -2^x$       i)  $y = -2^{-x}$



**2** Naszkicuj wykres funkcji:

- a)  $y = 2^{|x|}$       b)  $y = |2^x|$       c)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$       d)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$

**3** Wśród podanych wzorów znajdź takie, które przedstawiają funkcje równe:

$$f_1(x) = 2^{x+3} \quad f_2(x) = 2^{x-3} \quad f_3(x) = 8 + 2^x \quad f_4(x) = 8 \cdot 2^x$$

$$f_5(x) = \frac{2^x}{8} \quad f_6(x) = 8^x \quad f_7(x) = 2^{x^2} \quad f_8(x) = 2^{2^x}$$

**4** Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem  $y = a^x$  należy punkt Q.

Oblicz a, gdy:

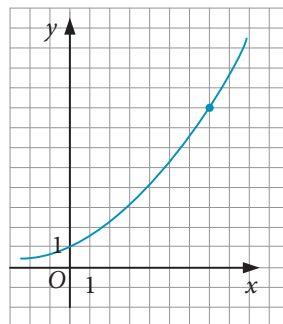
- a)  $Q = (3, 8)$       b)  $Q = (3, 27)$       c)  $Q = \left(10, \frac{1}{1024}\right)$   
 d)  $Q = \left(3, \frac{1}{64}\right)$       e)  $Q = (4, 4)$       f)  $Q = (3, 3\sqrt{3})$

**5** Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej  $f$ , której wzór ma postać  $f(x) = a^x$ .

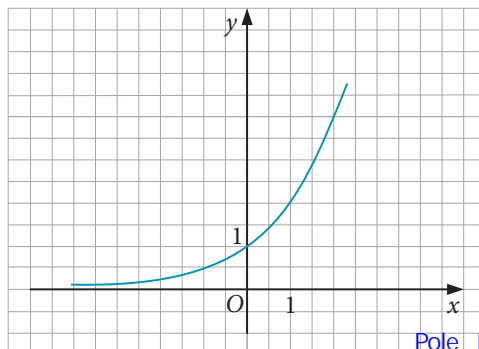
a) Na podstawie zaznaczonego punktu na krzywej wykładniczej znajdź wartość  $a$ .

b) Naszkicuj wykres funkcji  $g$  określonej wzorem

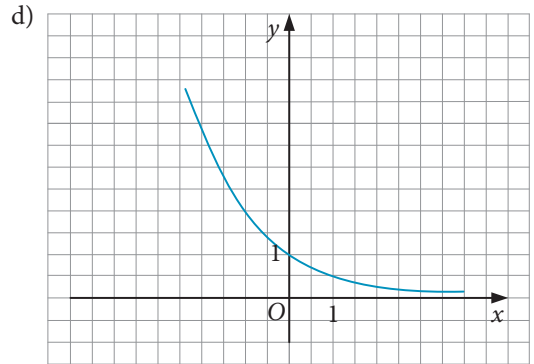
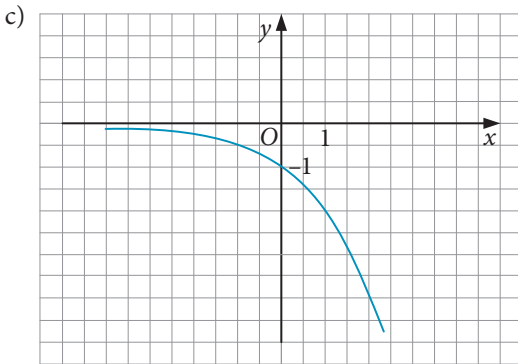
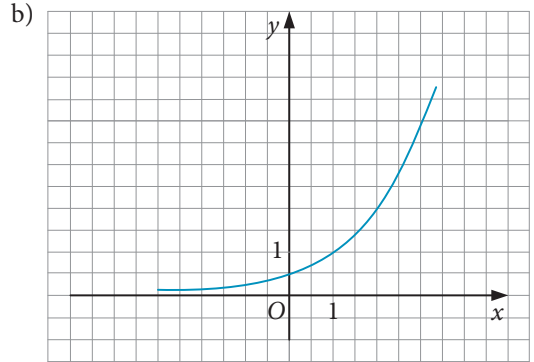
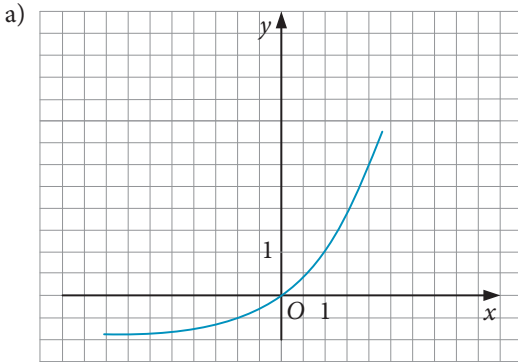
$$g(x) = f(x) - 1.$$



**6** Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = 2^x$ .



Napisz wzór funkcji, której wykres przedstawiono na poniższym rysunku, wiedząc, że wykres ten powstał przez przesunięcie wykresu funkcji  $f$ .



**7** Za pomocą czterech doświadczeń dokonano pomiaru pewnych wielkości  $t$  i  $V$ . Istnieje przypuszczenie, że wielkości te można opisać za pomocą modelu matematycznego wykorzystującego funkcję wykładniczą daną wzorem  $V = b \cdot a^t$ , gdzie  $b$  i  $a$  są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla danego doświadczenia. Które wyniki pomiarów wykluczają to przypuszczenie?

a) 

$t$	0	0,5	1
$V$	10	5	2,5

b) 

$t$	0	5	10
$V$	0,001	0,032	1,024

c) 

$t$	0	2	4
$V$	$\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$	$600\sqrt{2}$

**8** Znajdź  $x$ , dla którego zachodzi równość:

a)  $2^x = 32$

b)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$

c)  $12^x = 12^2$

d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = \frac{1}{64}$

e)  $4^{2x} = \frac{1}{256}$

f)  $4^{x+4} = 4^{1-x}$

g)  $7^x = 1$



**9** Liczba bakterii pewnej kolonii powiększa się o 50% co godzinę. Jeśli kolonia ta w południe liczyła 3 miliony, to podaj jej liczbę w przedziałach półgodziny od  $10^{30}$  do  $14^{00}$ . Odpowiedź podaj z dokładnością do wartości całkowitej. Do obliczeń możesz użyć kalkulatora.



Kup książkę

Pole ksi k



10 Pewna cząstka radioaktywna ma masę 50 gramów, a jej rozpad powoduje zmniejszenie masy o 20% każdego roku. Podaj wzór na masę tej cząstki po  $t$  latach. Narysuj wykres tej funkcji. Na podstawie wzoru i wykresu udziel odpowiedzi na poniższe pytania z dokładnością do pełnych miesięcy.

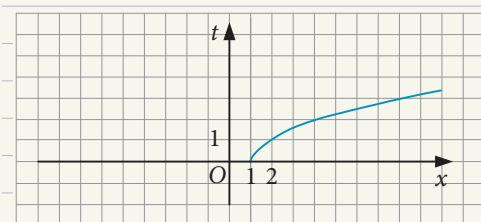
- Kiedy masa tej cząstki wynosiła 70 gramów?
- Kiedy masa tej cząstki będzie równa 32 gramy?

Do obliczeń można korzystać z kalkulatora.

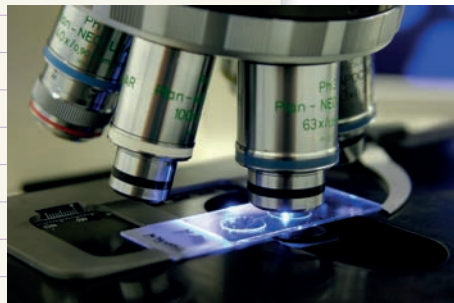
## \*3.2. Funkcja logarytmiczna

Powróćmy do przykładu opisanego w poprzednim rozdziale. Zależność liczby bakterii  $y(t)$  od czasu (wyrażonego w dniach), jaki upłynął od momentu, gdy próbka zawierała jedną bakterię, została opisana za pomocą funkcji określonej wzorem  $y(t) = 2^t$ . Chcemy teraz obliczyć, kiedy wartość populacji będzie wynosiła 2 miliony bakterii. Szukamy takiego  $t$ , że  $2^t = 2000000$ . Z definicji logarytmu wynika, że  $t = \log_2 2000000 \approx 21$ . Jeżeli więc  $t$  oznacza czas (wyrażony w dniach), jaki upłynął od momentu, w którym próbka zawierała jedną bakterię, do momentu, gdy zawierała pewną liczbę  $x$  bakterii, to otrzymujemy związek  $t = \log_2 x$ . Zatem jeśli chcemy obliczyć czas  $t$  w zależności od liczby bakterii, to możemy obliczyć wartość funkcji określonej wzorem  $t(x) = \log_2 x$ .

Możemy narysować wykres otrzymanej funkcji, przyjmując, że  $x \geq 1$ .



Otrzymany wykres jest fragmentem wykresu funkcji nazywanej funkcją logarytmiczną.



Z pierwszej klasy znamy pojęcie logarytmu.

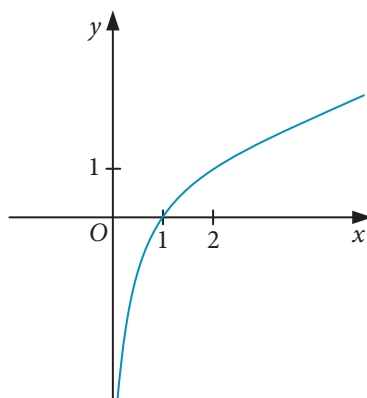
**{ Uwaga }**

Jeżeli,  $a, b > 0$  oraz  $a \neq 1$ , to logarytmem przy podstawie  $a$  z liczby  $b$  nazywamy taką liczbę  $c$ , że  $a^c = b$ . Przy takich zastrzeżeniach można napisać symbolicznie:  
 $c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$ .

**\* Przykład 1.**

Dana jest funkcja  $y = \log_2 x$  dla  $x > 0$ . Sporządźmy tabelę wybranych wartości tej funkcji i naszkicujmy jej wykres.

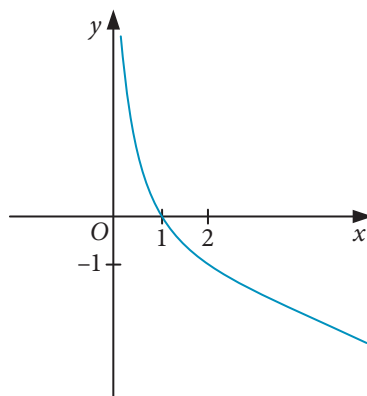
$x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3



**\* Przykład 2.**

Dana jest funkcja  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  dla  $x > 0$ . Sporządźmy tabelę wybranych wartości tej funkcji i naszkicujmy jej wykres.

$x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3



Funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = \log_a x,$$

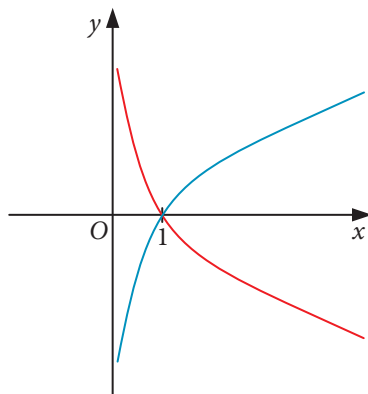
gdzie  $x \in \mathbb{R}$  i  $x > 0$  oraz  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie  $a$ .

Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

*Definicja*

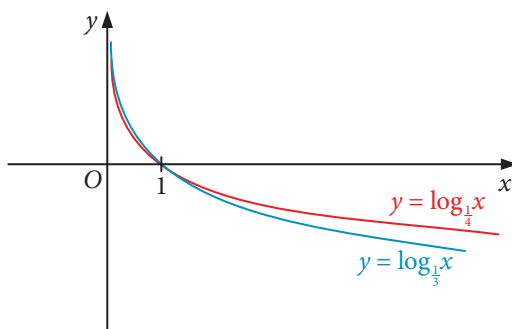
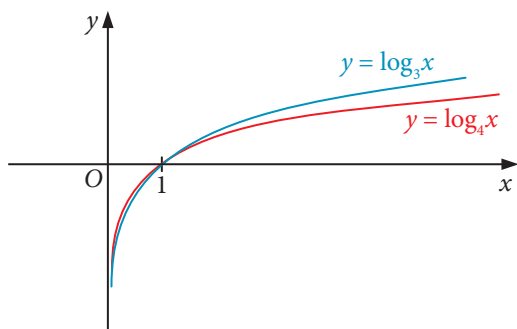
→ Dla  $0 < a < 1$  funkcja logarytmiczna jest malejąca (wykres czerwony).

Dla  $a > 1$  funkcja logarytmiczna jest rosnąca (wykres niebieski).



Wykresy funkcji  $y = \log_a x$  i  $y = \log_{\frac{1}{a}} x$  są do siebie symetryczne względem osi  $Ox$ .

Oto kilka przykładów wykresów funkcji logarytmicznych:



→ Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest przedział  $(-\infty, \infty)$ .

Oś  $Oy$  nazywamy asymptotą pionową wykresu tej funkcji.

Funkcja logarytmiczna każdą wartość przyjmuje dokładnie jeden raz.

Wykres funkcji przecina oś  $Ox$  w punkcie o współrzędnych  $(1, 0)$ .

Przesuwając wykres funkcji logarytmicznej  $y = \log_a x$  wzdłuż osi układu współrzędnych, możemy rysować inne wykresy funkcji, np.:

1. funkcję  $y = \log_a x + b$  rysujemy, przesuwając wykres funkcji  $y = \log_a x$  wzdłuż osi  $Oy$  o  $b$  jednostek,
2. funkcję  $y = \log_a (x - c)$  rysujemy, przesuwając wykres funkcji  $y = \log_a x$  wzdłuż osi  $Ox$  o  $c$  jednostek.





Funkcja logarytmiczna jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej. Rzeczywiście:

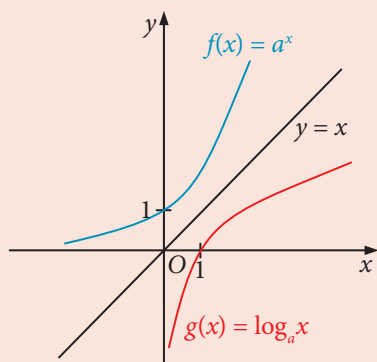
$y = a^x$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = \log_a y$ , przy założeniu, że  $a > 0$  i  $a \neq 1$  oraz  $y > 0$ .

Funkcja  $x(y) = \log_a y$  jest funkcją zmiennej  $y$  i jej wykres pokrywa się z wykresem funkcji  $y(x) = a^x$ . Jeżeli chcemy narysować wykres funkcji  $y(x) = \log_a x$ , musimy zamienić rolami zmienne  $x$  i  $y$ . Przekształceniem, w którym oś  $Ox$  przechodzi na oś  $Oy$  i odwrotnie, jest odbicie symetryczne względem prostej  $y = x$ .

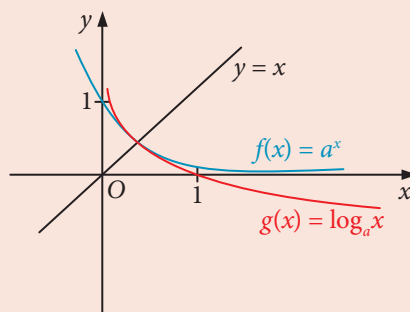
Przedstawimy w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji wykładniczej i odwrotnej do niej logarytmicznej o tej samej podstawie  $a$ .

Wykres funkcji odwrotnej  $g$  do danej funkcji  $f$  jest symetryczny względem prostej o równaniu  $y = x$ .

Dla  $a > 1$  wykresy nie mają punktów wspólnych.



Dla  $0 < a < 1$  wykresy przecinają się w punkcie należącym do prostej  $y = x$ .



Czy wykresy funkcji wykładniczej i odwrotnej do niej funkcji logarytmicznej o podstawie  $0 < a < 1$  mają punkty wspólne?

Rozpatrzmy dwie funkcje:

$$f(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x \text{ i } g(x) = \log_{\frac{1}{16}} x.$$

$$\text{Można zauważyć, że dla } x = \frac{1}{4} \text{ mamy } f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{oraz dla } x = \frac{1}{2} \text{ mamy } f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Zatem wykresy tych funkcji przecinają się w punktach o współrzędnych  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ .

## Zadania



1 Naszkiuj wykresy funkcji:

a)  $y = \log_2 x$       b)  $y = \log_2(x+1)$       c)  $y = -1 + \log_2 x$       d)  $y = 1 - \log_2 x$



2 Naszkiuj odpowiednie wykresy funkcji i korzystając z nich, podaj rozwiązania nierówności:

a)  $\log_3 x \leq 3$       b)  $\log_{\frac{1}{3}} x \geq -1$       c)  $\log_{\frac{1}{2}} x < 2$

3 Dla jakiej wartości  $k$  punkt  $P$  należy do wykresu funkcji  $f(x) = \log_k x$ ?

a)  $P = (8, 3)$       b)  $P = (125, 3)$       c)  $P = (1000, 3)$

d)  $P = (64, -3)$       e)  $P = (729, -6)$

4 Naszkiuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji i zapisz ich dziedziny:

a)  $f(x) = \log_2 x$       b)  $f(x) = \log_2 x + 2$

c)  $f(x) = \log_2(x+2)$       d)  $f(x) = \log_2(x+2) + 2$

### 3.3. Spozna podstawy programowej — skala logarytmiczna

Aby zobrazować, do czego może w praktyce służyć skala logarytmiczna, spójrzmy na poniższy opis.

Wiemy, że pewna wielkość  $y$  rośnie wraz ze wzrostem innej wielkości  $x$  szybciej niż liniowo. Nie wiemy jednak, czy  $y$  zależy od drugiej, czy może trzeciej potęgi  $x$ . Zapiszmy więc  $y = Ax^n$ , gdzie stałe  $A$  oraz  $n$  są nieznanymi liczbami rzeczywistymi.

Po obustronnym zlogarytmowaniu otrzymujemy:  $\log y = \log Ax^n$ , a stąd na podstawie własności działań na logarytmach mamy:  $\log y = \log A + n \log x$ .

Zatem jeśli na obu osiach  $Ox$  i  $Oy$  umieścimy logarytmy odpowiednich wartości, to wykresy jednomianów stopnia dodatniego, funkcji pierwiastkowej itp. staną się prostymi. Wartości  $\log A$  oraz  $n$  możemy odczytać z wykresu.

#### \* Przykład 1.

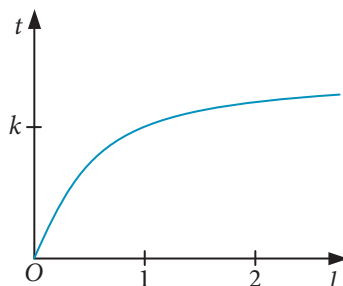
Przyjrzyjmy się wynikom, jakie otrzymano w pewnym eksperymencie z wahadłem.

Długość wahadła (w metrach) $l$	0,6	1,0	1,4	1,8	2,2
Średni czas wahnięcia (w sekundach) $t$	1,54	2,03	2,39	2,67	2,97

Przedstawmy teraz wykres funkcji po zlogarytmowaniu.

Jeśli  $t = kl^n$ , to  $\log t = \log kl^n = \log k + n \log l$ .

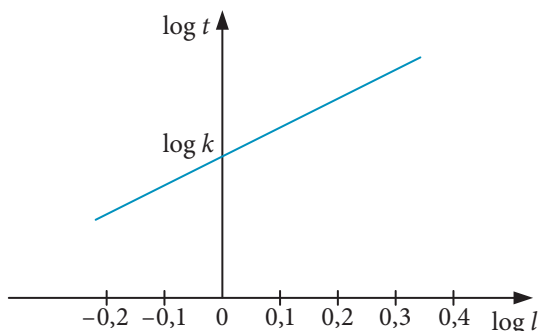
Wynika z tego, że wykresem  $\log t$  jako funkcji  $\log l$  będzie prosta o takim kącie nachylenia  $\alpha$ , że  $\operatorname{tg} \alpha = n$ . Przecina ona oś  $\log t$  w punkcie o rzędnej  $\log k$ .



$\log l$	-0,222	0,000	0,146	0,255	0,342
$\log t$	0,188	0,307	0,378	0,427	0,473

Tangens kąta nachylenia prostej do osi odciętych liczymy, dzieląc stosunek przyrostu wartości funkcji przez przyrost argumentów. Biorąc dane ze skrajnych kolumn tabeli, otrzymujemy:

$$n = \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,473 - 0,188}{0,342 - (-0,222)} \approx 0,5.$$



Natomiast  $\log k$  jest rzędną punktu przecięcia wykresu funkcji z osią rzędnych, czyli  $\log k = 0,307$ , a w konsekwencji  $k = 2,03$ . Z danych doświadczalnych wynika, że badaną funkcję w przybliżeniu opisuje wzór  $t = 2,03l^{0,5}$ .

## 3.4. Z zastosowań matematyki

### Temat badawczy nr 1

#### Opis ćwiczenia

Przeprowadzono pewien eksperyment, na podstawie którego określono, że liczba bakterii w pewnej hodowli wzrasta każdego dnia. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Czas [dni]	0	1	2	3	4	5	6	7
Liczba bakterii w przybliżeniu	100	200	400	800	1600	3200	6400	12 800

### Cwiczenie 1.

- Znajdź wzór funkcji opisującej powyższą zależność.
- Oblicz przybliżoną liczbę bakterii tej kolonii po 1,25 dnia oraz po 2,25 dnia.
- Oblicz, w którym dniu liczba bakterii wynosiła 102 400.
- Oszacuj, ile dni przed eksperymentem hodowla składała się z tylko jednej bakterii.

## Temat badawczy nr 2

### Opis ćwiczenia



Lekarstwa, które przyjmuje człowiek, są stopniowo eliminowane z organizmu. Przybliżona ilość leku, jaka pozostaje w organizmie, zależy od wielkości dawki leku  $d$  (mg) oraz czasu  $t$  (h) liczonego od momentu zażycia lekarstwa i wyraża się wzorem  $P(t) = d \cdot (0,7)^t$ , gdzie  $t \geq 0$ .

### Cwiczenie 2.

Załóżmy, że chory przyjął 20 mg leku.

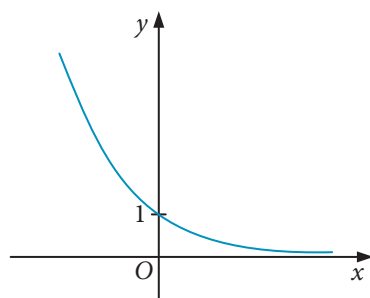
- Oszacuj, ile mg leku znajduje się w organizmie chorego po upływie 6 godzin od momentu zażycia lekarstwa.
- Wyznacz, ile procent zażytego leku organizm eliminuje w ciągu każdej godziny.
- Oblicz, jaka najmniejsza liczba godzin musi upłynąć, aby w organizmie chorego pozostało co najwyżej 0,56495 mg leku.

## 3.5. Prosto do matury

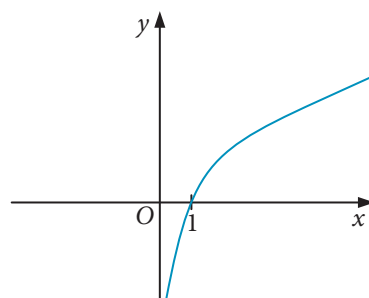
### ZESTAW I (TESTOWY)

- 1 Który rysunek przedstawia wykres funkcji wykładniczej  $y = a^x$  dla  $a > 1$ ?

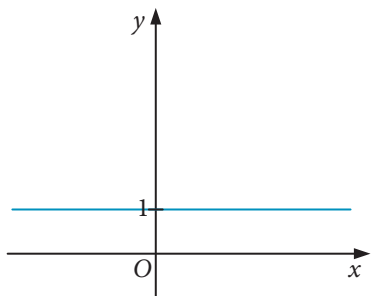
A.



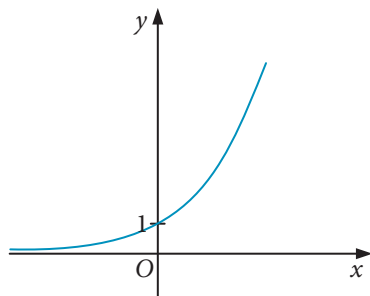
B.



C.

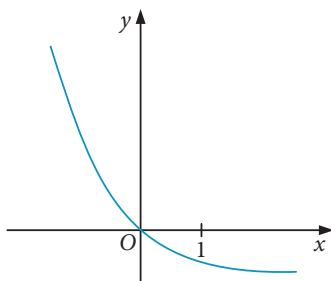


D.

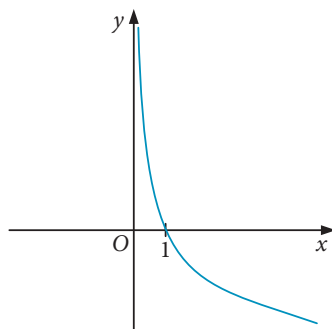


2 Który rysunek przedstawia wykres funkcji wykładniczej  $y = a^x$  dla  $a < 1$ ?

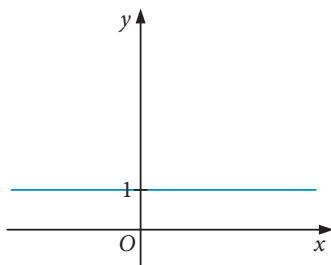
A.



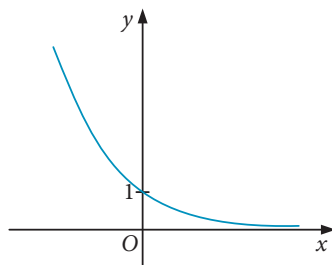
B.



C.



D.



3 Rozważmy funkcje zadane wzorami  $f(x) = 5^{x-4}$  i  $g(x) = 2^x$ . Wykresy tych funkcji:

- A. nie posiadają punktów wspólnych.
- B. mają dokładnie jeden punkt wspólny.
- C. mają dokładnie dwa punkty wspólne.
- D. mają dokładnie pięć punktów wspólnych.

4 Gdy  $f$  jest funkcją wykładniczą określoną wzorem  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , to wykres

funkcji  $g$  określonej wzorem  $g(x) = -f(x) + 3$  nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

- A.  $y = 0$
- B.  $y = 1$
- C.  $y = 2$
- D.  $y = 3$

5 Dane jest równanie  $x^2 = 2^x$ . Jednym z rozwiązań tego równania jest liczba 2.

A. Równanie to nie ma innych rozwiązań.

B. Równanie to prócz rozwiązania  $x = 2$  ma jeszcze tylko jedno rozwiązanie, jest ono dodatnie.

C. Równanie to prócz rozwiązania  $x = 2$  ma jeszcze tylko jedno rozwiązanie, jest ono ujemne.

D. Równanie to prócz rozwiązania  $x = 2$  ma jeszcze co najmniej dwa inne rozwiązania.

6 Liczba rozwiązań równania  $2^x = 4x$  jest równa:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

7 Równanie  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = m$ , gdzie  $m \in \mathbb{R}$ :

A. nigdy nie ma rozwiązania.

B. może nie mieć rozwiązań.

C. zawsze ma jedno rozwiązanie.

D. może mieć dwa rozwiązania.

8 Jeżeli  $\left(4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{3}{5}}\right) : (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 4^x$ , to  $x$  jest równe:

A. 2

B.  $\frac{15}{16}$

C.  $\frac{16}{15}$

D.  $\frac{10}{3}$



9 Równanie  $9^{3x-1} = 3^{8x-2}$ :

A. ma dokładnie dwa rozwiązania.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

C. jest sprzeczne.

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

10 Z nierówności  $a^{-2} < a^x$  wynika, że:

A.  $x > -2$  dla  $a \in (0, +\infty)$

B.  $x < -2$  dla  $a \in (0, 1)$

C.  $x < -2$  dla  $a \in (1, +\infty)$

D.  $x \in \emptyset$  dla  $a \in \mathbb{R}$

11 Jeżeli  $2^t = 5$  i  $6^t = 2$ , to  $12^t$  wynosi:

A. 12

B. 5

C. 10

D. 2

12 Wyrażenie  $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot 27^{-2}}{9^{-5} \cdot \sqrt{3^4}}$  zapisane jako potęga o podstawie 3 ma postać:

A.  $3^{-11}$

B.  $3^5$

C.  $3^2$

D.  $3^{-5}$

13 Punkt  $P = \left(-3, \frac{1}{8}\right)$  należy do wykresu funkcji określonej wzorem:

- A.  $y = 2^x$       B.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$       C.  $y = 3^x$       D.  $y = 3^{-x}$

14 Do wykresu funkcji  $y = 3^{5-2x}$  należy punkt o współrzędnych:

- A.  $\left(4, \frac{1}{27}\right)$       B.  $(3, 1)$       C.  $(2, -1)$       D.  $(1, 9)$

15 Wskaż funkcję rosnącą:

- A.  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$       B.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$       C.  $f(x) = 2^{-x}$       D.  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

## ZESTAW II (RACHUNKOWY)

1234  
+ 78  
-----  
1372

1 Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem  $y(x) = a^x$  należy punkt  $P = (4, 256)$ . Oblicz  $a$ .

2 Wykres funkcji wykładniczej określonej wzorem  $y(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$  przechodzi przez punkt, którego druga współrzędna  $y$  wynosi  $\frac{8}{125}$ . Znajdź pierwszą współrzędną tego punktu.

3 Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem  $y = a^x$  należy punkt  $P = \left(-2, \frac{4}{9}\right)$ . Znajdź wartość tej funkcji dla  $x = 3$ .

4 Wykres funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = 2^x$  przesunięto względem osi  $Ox$  o 3 jednostki w lewo i względem osi  $Oy$  o 1 jednostkę w górę. Podaj wzór funkcji  $g$ , której wykres otrzymano w wyniku tych przekształceń.

5 W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  i  $g(x) = \log_2 x$ . Podaj rozwiązanie równania  $f(x) = g(x)$ .

6 W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  i  $g(x) = \log_2 x$ . Podaj zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq g(x)$ .

7 Wykres funkcji  $f(x) = \log_3(x+m) - k$ , której dziedziną jest zbiór  $(-3, +\infty)$ , przechodzi przez punkt  $(6, -5)$ . Znajdź  $m$  i  $k$ .

8 Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f(x) = \log(x - 2x^3)$ .

- 9 Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  oraz  $a > 0$  prawdziwa jest nierówność  $\frac{1}{a^x + a^{-x} - 1} > 0$ .
- 10 Rozwiąż graficznie nierówność  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8$ .
- 11 Rozwiąż graficznie nierówność  $2^x < 16$ .
- 12 Znajdź współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji  $f(x) = x^3 \cdot 8^x + 5x^2 \cdot 8^x + 6x \cdot 8^x$  z osiami układu współrzędnych.
- 13 Znajdź współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji  $f(x) = 2^{3-x}$  z wykresem funkcji  $g(x) = 2^{-x} \cdot x^2 + 2^{1-x} \cdot x$ .
- 14 Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = 2 + 3^{-x}$ .
- 15 Wiedząc, że  $2^t = 5$  i  $6^t = 2$ , i korzystając z własności funkcji wykładniczej, oblicz, ile wynosi  $6^{-t^2+3t-2}$ .



### ZESTAW III (ZADANIA RÓŻNE)



- 1 Populacja  $P$  pewnego miasta wzrasta zgodnie ze wzorem  $P = 5000 \cdot (1,1)^{0,2t}$ , gdzie  $t \in \mathbb{N}$  oznacza liczbę lat po 1980 roku. Jaka będzie liczba mieszkańców tego miasta po 2028 roku?



- 2 Liczba  $N$  oznacza masę pierwiastka radioaktywnego po pełnych  $t$  latach rozpadu ( $N_0$  jest masą początkową):  $N = N_0 (0,97)^{0,0004t}$ . Ile substancji zostanie z 2 gramów po 7500 latach?

- 3 Przypuśćmy, że rząd zakłada, iż pensje wzrastają w tempie 4% na rok. Jeśli pensje w pewnym szczególnym zawodzie są podnoszone raz na trzy lata, to o ile procent powinny wzrastać, aby nadążyć za roczną średnią założoną przez rząd?

- 4 Obserwowana uprawa drożdży o objętości  $2 \text{ cm}^3$  podwaja swoją objętość co 30 minut. Oblicz objętość uprawy drożdży po upływie jednej godziny oraz po upływie jednej doby.

#### { Wskazówka }

Aby rozwiązać zadanie, skorzystaj ze wzoru zamieszczonego w ciekawostce na stronie 73.

- 5 Jednym z wielu produktów reakcji jądrowej, w której bierze udział uran, jest radioaktywny pluton, którego czas połowicznego rozpadu wynosi 25 000 lat. Jeżeli pewna ilość plutonu została zamknięta w betonie, to jaka jego część pozostanie po 100 000 lat?



# SKOROWIDZ

## A

aksjomat Peano, 161  
asymptota pozioma, 73

## C

ciąg arytmetyczny, 148  
   $n$ -ty wyraz ciągu, 149  
  różnica ciągu, 148  
  suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu, 151  
  suma wyrazów ciągu, 150  
  twierdzenie Dirichleta, 149  
  własność ciągu, 148  
ciąg Fibonacciego, 140  
ciąg geometryczny, 153  
  granica ciągu, 158  
  iloraz ciągu, 153  
   $n$ -ty wyraz ciągu, 154  
  suma  $n$  wyrazów ciągu, 156  
  szereg geometryczny, 158  
  własność ciągu, 154  
  zbieżny, 159  
ciąg liczbowy, 138  
  arytmetyczny, 148  
  Fibonacciego, 140  
  geometryczny, 153  
  granica ciągu stałego, 145  
  granice ciągów, 143  
  malejący, 140  
  niemalejący, 140  
  nierosnący, 140  
  nieskończony, 138  
   $n$ -ty wyraz ciągu, 138  
  określanie ciągów, 139, 142  
  określony rekurencyjnie, 142  
  pojęcie ciągu, 138  
  rosnący, 140  
  rozbieżny, 146  
  skończony, 138  
  zbieżny do liczby, 144  
  zbieżny do zera, 144

cosinus, 90, 99  
  kofunkcja, 105  
  podwojonego kąta, 123  
  twierdzenie cosinusów, 187  
cosinusoida, 109  
  własności, 110  
cotangens, 105  
czas połowicznego rozpadu, 73, 86

## D

datowanie radiowęglowe, 73  
  czas połowicznego rozpadu, 73, 86  
długość  
  odcinka, 208  
  promienia okręgu, 233  
  stycznej, 180  
  wektora, 212  
dodawanie  
  wektorów, 212  
  wielomianów, 13  
  wyrażeń wymiernych, 48  
drgania harmoniczne, 128  
dwumian, 11  
dziedzina  
  funkcji logarytmicznej, 77  
  funkcji wykładniczej, 72  
  funkcji wymiernej, 60  
  wyrażeń wymiernych, 46, 47  
dzielenie wielomianu, 17  
  dzielenie z resztą, 17  
  dzielna, 17  
  dzielnik, 17  
  grupowanie wyrazów, 23  
  pierwiastek wielomianu, 19  
  reszta, 17, 19  
  rozkład na czynniki, 21  
  szczególne przypadki, 20  
  twierdzenie Bézouta, 19  
  wylączenie wspólnego czynnika, 23  
  wzory skróconego mnożenia, 22, 24  
dzielna, 17  
dzielnik, 17

## F

- figury
  - jednokładność, 194
  - obrót, 197
  - podobieństwo, 194
- funkcja homograficzna, 60, 61
- postać kanoniczna, 61
- funkcja logarytmiczna, 76, 77
  - dziedzina, 77
  - logarytm, 77
  - malejąca, 78
  - rosnąca, 78
  - skala logarytmiczna, 80
  - tangens kąta nachylenia, 81
  - wykresy funkcji, 76, 78
  - zbiór wartości funkcji, 78
- funkcja nieparzysta, 108, 111
- funkcja odwrotna, 79
  - wykres, 79
- funkcja parzysta, 110
- funkcja wykładnicza, 70, 72
  - dziedzina, 72
  - krzywa wykładnicza, 71
  - malejąca, 72
  - potęgi o wykładniku wymiernym, 70
  - rosnąca, 71, 72
  - wykresy funkcji, 73
  - zbiór wartości funkcji, 73
- funkcja wymierna, 60
  - dziedzina, 60
  - funkcja homograficzna, 61
- funkcje trygonometryczne, 87
  - cosinus, 90, 99
  - koło trygonometryczne, 107
  - miary kąta, 94
  - mierzenie obrotów, 102
  - nierówności trygonometryczne, 112
  - okresowość funkcji, 103
  - określoność funkcji, 92
  - równania trygonometryczne, 112
  - sinus, 88, 90, 99
  - tangens, 90, 99
  - tożsamości trygonometryczne, 122
  - wartości funkcji, 107
  - wykresy funkcji, 107
  - wzory redukcyjne, 93, 104, 105
  - zależności trygonometryczne, 106
  - znaki funkcji, 92, 99
  - związki między funkcjami, 92

## G

- Gauss Carl Friedrich, 151
- geometria, 207
- gęstość ciała, 67
- granice ciągów, 143
  - stałych, 145
- twierdzenia o działaniach, 145
- zbieżnych, 144

## H

- harmoniki, 128
  - drgania harmoniczne, 128
- hiperbola, 55, 56
- hipoteza Murraya, 136

## I

- iloczyn skalarny wektorów, 240
  - kąt między wektorami, 240
  - pola trójkątów, 241
  - środek odcinka, 242
  - twierdzenie cosinusów, 242
  - własności iloczynu, 240
- indukcja matematyczna, 161
  - aksjomat Peano, 161
  - przejście indukcyjne, 162
  - sprawdzenie początkowe, 162
  - uogólniona zasada indukcji, 162

## J

- jednokładność, 193
  - figur, 194
  - odwrotna, 193
  - prosta, 193
  - skala jednokładności, 193
- jednomiany, 10
  - dwóch zmiennych, 10
  - jednej zmiennej, 10
  - podobne, 11
  - stopnia czwartego, 10
  - stopnia drugiego, 10
  - stopnia pierwszego, 10
  - stopnia trzeciego, 10
  - stopnia zerowego, 10

## K

- kartezjański układ współrzędnych, 208
  - oś odciętych, 208
  - oś rzędnych, 208

kąty  
bifurkacji, 136  
miary kąta, 94  
między wektorami, 240  
obrotu, 197  
pełny, 95  
półpełny, 95  
prosty, 94, 95  
środkowy, 172  
wpisany, 172, 173, 177  
zerowy, 95  
rozwarty, 93  
uogólniony, 102, 104

koło, 172  
promień, 172  
w układzie współrzędnych, 232  
trygonometryczne, 107

## L

logarytm, 77  
funkcja logarytmiczna, 77  
skala logarytmiczna, 80

## M

miara łukowa, 95  
kąt pełny, 95  
kąt półpełny, 95  
kąt prosty, 95  
kąt zerowy, 95  
radian, 95

miara stopniowa, 94  
kąt prosty, 94  
stopień, 94

miary kąta, 94  
miara łukowa, 95  
stopniowa, 94  
zamiana jednostek, 96

mnożenie  
wektorów, 239  
wielomianów, 13  
wrażen wymiernych, 48

moc urządzenia, 67

## N

napięcie elektryczne, 67  
natężenie prądu, 67  
nierówności liniowe  
graficzne rozwiązanie nierówności, 230  
interpretacja graficzna, 229  
z dwiema niewiadomymi, 230

nierówności trygonometryczne, 112  
graficzne rozwiązanie nierówności, 115  
rozwiązywanie metodą sprowadzania do  
nierówności podstawowej, 127

nierówności wielomianowe, 32, 59  
rozwiązanie nierówności, 32  
sposób rozwiązywania, 32  
wielomian zredukowany, 32

nierówności wymierne, 58  
nierówność wielomianowa, 59  
rozwiązywanie, 58

## O

obrót figury, 197  
kąt obrotu, 197  
środek obrotu, 197

odcinek, 208  
długość, 208  
środek, 210

odejmowanie  
wektorów, 213  
wielomianów, 13  
wrażen wymiernych, 48

okrąg, 172  
czworokąty opisane na okręgu, 183, 184  
czworokąty wpisane w okrąg, 183, 185  
definicja, 232  
długość promienia okręgu, 233  
kąt wpisany, 172  
okręgi styczne do siebie, 178  
promień, 172  
prosta, 234  
punkt styczności, 176  
równanie okręgu w postaci kanonicznej, 232  
równość odcinków stycznych, 177  
styczna do okręgu, 176  
trójkąty opisane na okręgu, 181  
trójkąty wpisane w okrąg, 181  
układ współrzędnych, 232  
współrzędne środka okręgu, 233

opór elektryczny, 67  
om, 67

oś  
odciętych, 208  
rzędnych, 208

## P

Peano Giuseppe, 161  
pierwiastek wielomianu, 19  
pierwsze odkrycie Gaussa, 150

planimetria, 171  
  jednokładność, 192  
  koło, 172  
  okrąg, 172  
  podobieństwo, 192  
  promień, 172  
  rozwiązywanie trójkątów, 189  
płaszczyzna kartezjańska, 207  
podobieństwo, 194  
  figur, 194  
  skala podobieństwa, 194  
  trójkątów, 195  
prawa  
  odbicia światła, 134  
  Ohma, 67  
  Snella, *Patrz* prawo załamania światła  
  załamania światła, 134  
promień, 172  
proporcjonalność odwrotna, 53  
  hiperbola, 55, 56  
  wykres, 54  
proporcjonalność prosta, 52  
proste, 219  
  odległość punktu od prostej, 228  
  okrąg, 234  
  pokrywające się, 223  
  prostopadła do osi, 219  
  prostopadłe, 225, 227  
  przecinające się, 223  
  równanie kierunkowe prostej, 220  
  równanie ogólne prostej, 219  
  równoległa do osi, 219  
  równoległe, 224, 227  
  styczna do okręgu, 176  
  własności prostej, 227  
  współczynnik kierunkowy prostej, 220  
  wzajemne położenie prostych, 223  
przekształcenia płaszczyzny, 236  
  geometryczne, 236  
  symetria osiowa, 237  
  symetrią środkową, 238  
  tożsamościowe, 237  
  wzajemnie jednoznaczne, 236  
punkt styczności, 176

**R**  
radiany, 95  
  zamiana na stopnie, 96  
reguła równoległoboku, 213

rekurencja, 142  
rozwiązywanie  
  nierówności liniowych, 230  
  nierówności trygonometrycznych, 115, 127  
  nierówności wielomianowych, 32  
  nierówności wymiernych, 58  
  równań trygonometrycznych, 112, 125, 126  
  równań wielomianowych, 29, 38  
  równań wymiernych, 57  
  trójkątów, 186, 188, 189  
równania trygonometryczne, 112, 125  
  graficzne rozwiązanie równania, 112  
  odcięte punktów, 113  
  rozwiązywanie metodą wprowadzenia po-  
  mocniczej niewiadomej, 125  
  rozwiązywanie z wykorzystaniem podsta-  
  wowych tożsamości, 126  
  równania podstawowe, 112  
równania wielomianowe, 26, 28  
  miejsca zerowe wielomianu, 29  
  przybliżone rozwiązywanie, 38  
  rozwiązanie równania, 29  
  rozwiązywanie, 29  
równania wymierne, 56  
  mianownik wyrażenia wymiernego, 57  
  rozwiązywanie, 57  
równanie kierunkowe prostej, 220  
równanie ogólne prostej, 219

## S

sinus, 90, 94, 99  
  kąta ostrego, 88  
  kofunkcja, 105  
  podwojonego kąta, 123  
  twierdzenie sinusów, 186  
sinusoida, 108  
  własności, 108  
skala  
  jednokładności, 193  
  logarytmiczna, 80  
  podobieństwa, 194  
stopnie, 94  
  zamiana na radiany, 96  
styczna do okręgu, 176, 177  
  długość stycznej, 180  
  równość odcinków stycznych, 177  
symetria osiowa, 237  
symetria środkowa, 238

szereg geometryczny, 158  
suma szeregu, 158  
zbieżny, 158, 159

## Ś

środek ciężkości trójkąta, 205

## T

tangens, 90, 99  
kofunkcja, 105  
tangensoida, 111  
własności, 111  
tożsamości trygonometryczne, 122  
podwojonego kąta, 123  
wzory redukcyjne, 122  
wzór jedynkowy, 123  
trójkąty  
dwusieczne kąta, 181  
jednokładny, 193  
obliczanie pola, 241  
obrót, 197  
opisane na okręgu, 181  
podobieństwo, 195  
rozwiązywanie trójkątów, 186, 188, 189  
symetralne boków, 181  
środek ciężkości, 205  
twierdzenie cosinusów, 187  
twierdzenie Pitagorasa, 208  
twierdzenie sinusów, 186  
wpisane w okrąg, 181  
trójmian kwadratowy niepełny, 11  
twierdzenia  
Bézouta, 19  
cosinusów, 187, 242  
Dirichleta, 149  
Pitagorasa, 208  
sinusów, 186  
Talesa, 209

## U

układ współrzędnych, 208  
kartezjański, 208  
koło, 232  
nierówności liniowe, 229  
odcinek, 208  
okrąg, 232  
oś odciętych, 208  
oś rzędnych, 208  
prosta, 219

symetria osiowa, 236  
symetria środkowa, 236  
wektory, 215  
wzajemne położenie prostych, 223  
ułamek algebraiczny, 46

## W

wektory, 211  
długość wektora, 212  
dodawanie wektorów, 212  
iloczyn skalarny wektorów, 240  
iloczyn wektora i liczby, 214  
kąt między wektorami, 240  
mnożenie wektorów, 239  
odejmowanie wektorów, 213  
postać kanoniczna wektora, 215  
prostopadłe wektory, 217, 240  
przeciwny, 213  
równoległe wektory, 217  
równość wektorów, 212,  
swobodny, 212, 214, 216  
współrzędne wektorów, 215  
zaczepiony, 211, 212  
zerowy, 212  
wielokąty równoważne, 199  
wielomiany, 9  
definiowanie jako funkcje, 28  
dodawanie wielomianów, 13  
dwumian, 11  
dzielenie przez dwumian, 17  
dzielenie z resztą, 17  
grupowanie wyrazów, 23  
miejsca zerowe, 29  
mnożenie wielomianów, 13  
nierówności wielomianowe, 32, 59  
odejmowanie wielomianów, 13  
ogólna postać, 10  
pierwiastek wielomianu, 19  
podobne, 11  
postać iloczynowa, 22  
przykładowe wykresy, 10  
reszta z dzielenia, 17, 19  
rozkład na czynniki, 21  
równania wielomianowe, 26, 28  
równość wielomianów, 12  
stopnia czwartego, 10  
stopnia drugiego, 10  
stopnia pierwszego, 10  
stopnia trzeciego, 10

wielomiany

- stopnia zerowego, 11
- trójmian, 10, 11
- twierdzenie Bézouta, 19
- uporządkowany, 12
- wykresy funkcji, 33, 36
- wyłączanie wspólnego czynnika, 23
- wyraży wielomianu, 12
- wzory skróconego mnożenia, 24
- wzory Viète'a, 30
- zerowy, 11
- zredukowany, 32

własności

- cosinusoidy, 110
- ciągu arytmetycznego, 150
- ciągu geometrycznego, 154
- iloczynu skalarnego wektorów, 240
- sinusoidy, 108
- tangensoidy, 111

wspólny mianownik, 49

wykres funkcji odwrotnej, 79

wykres proporcjonalności odwrotnej, 54

- hiperbola, 55, 56

wykresy funkcji logarytmicznej, 76, 78

wykresy funkcji trygonometrycznych, 107

- cosinusoida, 109
- koło trygonometryczne, 107
- sinusoida, 108
- tangensoida, 111

wykresy funkcji wielomianowej, 33, 36

- przedziały, 33
- szkicowanie wykresów, 37

wykresy funkcji wykładniczej, 73

wyraży wielomianu, 12

wyrażenia algebraiczne, 46

- ułamek algebraiczny, 46

wyrażenia wymierne, 46

- dodawanie wyrażeń, 48
- dziedzina, 46, 47
- dzielenie wyrażeń, 48
- funkcja homograficzna, 60, 61
- funkcja wymierna, 60
- mianownik wyrażenia, 57
- mnożenie wyrażeń, 48
- najprostszy wspólny mianownik, 49
- nierówności wymierne, 58
- odejmowanie wyrażeń, 48
- proporcjonalność odwrotna, 53
- proporcjonalność prosta, 52
- rozszerzanie wyrażeń, 47
- równania wymierne, 56
- równe zero, 57
- sens liczbowy, 47
- ułamek algebraiczny, 46
- upraszczanie wyrażeń, 47
- wyrażenia algebraiczne, 46

wzory Gaussa, 242

wzory redukcyjne, 93, 104, 105

- kąty rozwarte, 93
- kąty uogólnione, 104
- tożsamości trygonometryczne, 122
- zależności trygonometryczne, 106

wzory Viète'a, 30

wzór trapezowy, 243

## Z

zbieżność ciągu, 145

# PROGRAM PARTNERSKI

GRUPY WYDAWNICZEJ HELION



- 1. ZAREJESTRUJ SIĘ**
- 2. PREZENTUJ KSIĄŻKI**
- 3. ZBIERAJ PROWIZJĘ**

Zmień swoją stronę WWW  
w działający bankomat!

**Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!**

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA WYDAWNICZA

 **Helion SA**



## Dobre wyniki z matematyki

Matematyka jest wszędzie — nie tylko w szkole, lecz także w bankach, na budowach, w internecie czy... w muzyce. Nawet jeśli nauka matematyki nie jest Twoim ulubionym zajęciem, ona będzie Ci towarzyszyć przez całe życie. Zaczynj więc główkować z **Matematyką Europejczyka** i rozwijaj swoją wyobraźnię dzięki wiedzy na temat geometrii. Dowiedz się, co wspólnego mają ciągi z kryptografią, i przekonaj się, co wyniknie z mnożenia wielomianu przez wielomian. Dzięki udogodnieniom zastosowanym przez autorów łatwo znajdziesz interesujące Cię notatki z lekcji, zestawy zadań z serii **Prosto do matury** oraz praktyczne i zaskakujące tematy badawcze. Książka pozwala uczniom zdobyć umiejętności wykraczające poza podstawę programową, jest też świetną pomocą podczas samodzielnej nauki.

**Kompletny zestaw Matematyka Europejczyka. Klasa 2** stanowią: **podręcznik + zbiór zadań + płyta CD.**



Seria podręczników, zbiorów zadań i płyt CD **Matematyka Europejczyka** wydawnictwa **Helion** pozwala uczniom zdobywać wiedzę bez stresu, a nauczycielom ułatwia przekazywanie nowego materiału w interesujący i niebanalny sposób.

## Matematyka Europejczyka – TO SIĘ LICZY!

<http://edukacja.helion.pl>

Nr katalogowy: 5229



Księgarnia internetowa:  
<http://helion.pl>



Zamówienia telefoniczne:  
**0 801 339900**



**0 601 339900**

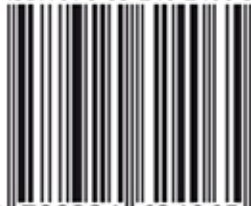
 **Helion**  
EDUKACJA

Sprawdź najnowsze promocje:  
• <http://helion.pl/promocje>  
Książki najchętniej czytane:  
• <http://helion.pl/bestsellery>  
Zamów informacje o nowościach:  
• <http://helion.pl/nawosci>

Helion SA  
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice  
tel.: 32 230 98 63  
e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)  
<http://helion.pl>

**helion.pl**  
księgarnia  
internetowa

ISBN 978-83-246-2406-5



9 788324 624065

Informatyka w najlepszym wydaniu