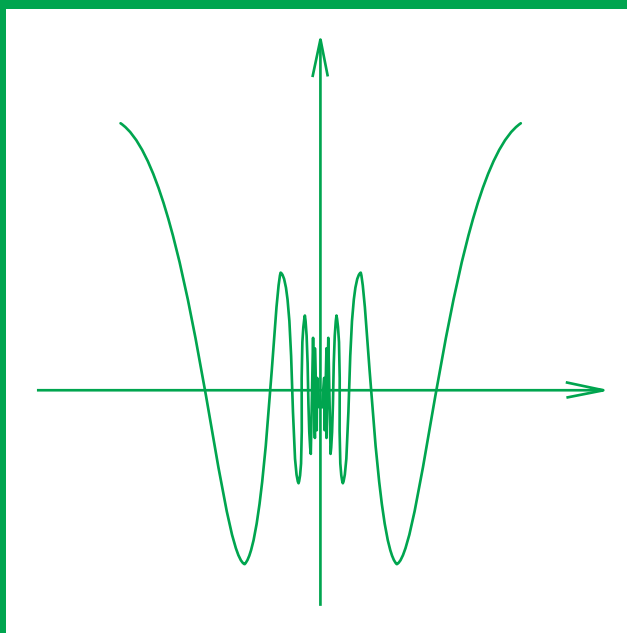


Joanna Ger

Kurs matematyki dla chemików



Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego



Katowice 2012

Kurs matematyki
dla chemików



nr 136

Joanna Ger

Kurs matematyki dla chemików

Wydanie piąte poprawione

Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego



Katowice 2012

Redaktor serii: Matematyka
Tomawsz Dłotko

Recenzenci I wydania
Józef Banaś
Stanisław Stoiński

Spis treści

Przedmowa	9
1. Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości	11
1.1. Elementy rachunku zdań	11
1.2. Elementy rachunku kwantyfikatorowego	13
1.3. Rachunek zbiorów	15
1.4. Odwzorowania	17
1.5. Zadania	21
2. Liczby rzeczywiste i zespolone. Funkcje elementarne	23
2.1. Własności zbioru liczb rzeczywistych	23
2.2. Funkcje monotoniczne i wypukłe	30
2.3. Funkcje elementarne	34
2.4. Liczby zespolone	51
2.5. Zadania	58
3. Elementy algebry liniowej	61
3.1. Macierze	61
3.2. Wyznaczniki	65
3.3. Wzory Cramera	74
3.4. Układy liniowe	80
3.5. Przestrzenie liniowe	84
3.6. Baza i wymiar przestrzeni liniowej	88
3.7. Rachunek wektorowy w \mathbb{R}^n	94
3.8. Odwzorowania liniowe	99
3.9. Grupa przekształceń liniowych na płaszczyźnie	108
3.10. Zadania	110

4. Ciągi i szeregi	113
4.1. Ciągi liczbowe i ich własności	113
4.2. Granica ciągu rzeczywistego i jej własności	116
4.3. Granice niewłaściwe	132
4.4. Zbieżność w przestrzeniach \mathbb{R}^k ($k \in \mathbb{N}$)	135
4.5. Szeregi liczbowe	136
4.6. Kryteria zbieżności szeregów	140
4.7. Szeregi potęgowe	148
4.8. Zadania	151
5. Granica i ciągłość odwzorowań	153
5.1. Pewne szczególne podzbiory \mathbb{R}^n	153
5.2. Granica odwzorowania	158
5.3. Własności granic funkcji	161
5.4. Ciągłość odwzorowań	165
5.5. Własności odwzorowań ciągłych w zbiorach zwartych	169
5.6. Dalsze własności funkcji ciągłych	171
5.7. Granice pewnych szczególnych funkcji	179
5.8. Ciągłość funkcji elementarnych	184
5.9. Zadania	188
6. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej	191
6.1. Iloraz różnicowy i pochodna	191
6.2. Interpretacja pochodnej	194
6.3. Pochodne funkcji elementarnych	195
6.4. Działania na pochodnych	197
6.5. Pochodna funkcji odwrotnej	199
6.6. Pochodna funkcji złożonej	201
6.7. Różniczka funkcji	203
6.8. Pochodne wyższych rzędów	204
6.9. Twierdzenia o wartości średniej	205
6.10. Wnioski z twierdzeń o wartości średniej	209
6.11. Ekstrema funkcji	216
6.12. Wypukłość i punkty przegięcia funkcji	219
6.13. Asymptoty	220

6.14. Wyrażenia nieoznaczone i reguła de l'Hospitala	221
6.15. Badanie przebiegu zmienności funkcji	224
6.16. Szereg Taylora	226
6.17. Całka nieoznaczona	231
6.18. Zadania	242
7. Całka oznaczona na prostej	245
7.1. Definicje	245
7.2. Całkowalność pewnych klas funkcji	248
7.3. Własności całki	251
7.4. Interpretacja geometryczna całki	262
7.5. Funkcja górnej granicy całkowania	263
7.6. Twierdzenia o wartości średniej	269
7.7. Całki niewłaściwe	271
7.8. Krzywe w \mathbb{R}^n	278
7.9. Zadania	283
8. Rachunek różniczkowy w przestrzeniach \mathbb{R}^n	285
8.1. Definicja różniczki	285
8.2. Pochodne cząstkowe	287
8.3. Formalne prawa różniczkowania	294
8.4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów i wzór Taylora	300
8.5. Ekstrema funkcji wielu zmiennych	305
8.6. Funkcje uwikłane	311
8.7. Ekstrema warunkowe	316
8.8. Zadania	323
9. Całka oznaczona Riemanna w przestrzeni \mathbb{R}^n.	325
9.1. Definicja n -wymiarowej całki Riemanna	325
9.2. Własności całki	329
9.3. Całki iterowane i ich związek z całką w \mathbb{R}^n	332
9.4. Całki w obszarach normalnych w \mathbb{R}^2	340
9.5. Powierzchnie w \mathbb{R}^3	347
9.6. Całki w obszarach normalnych w \mathbb{R}^3	349
9.7. Zastosowanie do zagadnień fizyki	353

9.8. Zadania	359
10. Całka krzywoliniowa	361
10.1. Orientacja krzywej	361
10.2. Całka niezorientowana	365
10.3. Całka krzywoliniowa zorientowana	368
10.4. Twierdzenie Greena	373
10.5. Niezależność całki od drogi całkowania	377
10.6. Interpretacja wektorowa	380
10.7. Zadania	384
11. Całka powierzchniowa	387
11.1. Całka powierzchniowa niezorientowana	387
11.2. Całka powierzchniowa zorientowana	391
11.3. Zadania	397
12. Elementy teorii równań różniczkowych zwyczajnych	399
12.1. Uwagi wstępne	399
12.2. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego	401
12.3. Problem Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu pierwszego	403
12.4. Pewne szczególne typy równań różniczkowych	410
12.5. Układy równań liniowych rzędu pierwszego	422
12.6. Równania liniowe n -tego rzędu o stałych współczynnikach	430
12.7. Zadania	441
Literatura	442
Skorowidz	443

Przedmowa

Program studiów uniwersyteckich na kierunku chemii przewiduje w ramach pierwszego roku wykład podstawowych pojęć matematycznych. Wykład ten ma być użyteczny również w dalszym kształceniu chemików, dlatego poruszane zagadnienia muszą obejmować takie dziedziny matematyki, jak: rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, algebra liniowa i ogólna. Wszelako ograniczona liczba godzin wykładu nie pozwala na tak głębokie potraktowanie poruszanych tematów, jak tego pragnąłby wykładowca – matematyk.

Przez wiele lat wykładałam matematykę na pierwszym roku chemii w Uniwersytecie Śląskim, starając się zwalczać pokusę „przematematyzowania” z jednej strony, oraz pokusę zamiany wykładu w spis formułek i twierdzeń z drugiej.

Doświadczenie to, a także ścisły kontakt z pracownikami Instytutu Chemii i studentami podsunęły pomysł napisania skryptu, który zawierałby wiedzę matematyczną niezbędną do studiowania chemii uniwersyteckiej. Skrypt z założenia ma służyć słuchaczom wykładu.

Rezygnując z najbardziej ogólnego przedstawienia materiału, nie rezygnuję ze ścisłości rozumowania. Wszystkie dowody zatem są szczegółowe, chociaż część twierdzeń jest wypowiedziana mniej ogólnie niż można by to uczynić, biorąc pod uwagę obecną wiedzę matematyczną. Niektóre trudniejsze dowody zostały wszakże pominięte lub przeprowadzone w szczególnych przypadkach.

Ponieważ skrypt ma z założenia charakter podręcznika zawierającego wszystkie potrzebne wiadomości, pierwsze rozdziały poświęcone są wprowadzeniu pojęć podstawowych. Znajdziemy tu elementy logiki oraz definicje wielu pojęć. W rozdziale II zdefiniowane są funkcje elementarne. Wiadomości z algebry liniowej zamieszczono w rozdziale III. Pozostałe

rozdziały obejmują teorię rachunku różniczkowego i całkowego, najpierw na prostej, a potem w przestrzeniach euklidesowych. W ostatnim rozdziale omawiam równania różniczkowe, uwzględniając tak ważne dla chemików równanie Schrödingera.

Wykładowi matematyki towarzyszą ćwiczenia, w obrębie których są rozwiązywane zadania ilustrujące „teorię”. Nie rezygnuję jednak z zamieszczenia po każdym rozdziale zadań, które Czytelnik powinien rozwiązać bez kłopotu po zapoznaniu się z treścią danego rozdziału. Aby mu ułatwić zrozumienie tej treści, zamieszczam liczne przykłady pokazujące, jak rozwiązać typowe problemy z użyciem wyłożonych twierdzeń.

Na końcu skryptu zamieściłam literaturę, z której korzystałam, pisząc ten skrypt.

Jeszcze raz podkreślam, że skrypt odpowiada treścią i objętością wykładowi prowadzonemu w Uniwersytecie Śląskim. W szczególności, ze względu na znaczną redukcję godzin tego wykładu w ostatnich latach (90 godz. zamiast 120 godz.), nie może on już obejmować tak ważnego działu, jakim jest rachunek prawdopodobieństwa.

Pokonanie rozmaitych trudności, jakie niejednokrotnie pojawiały się w trakcie przygotowywania tego skryptu, zawdzięczam mojemu mężowi Romanowi, który wnikliwie czytał każdy kolejny rozdział. Jego liczne uwagi dotyczące zarówno układu przedstawianych treści, jak i ich merytorycznego i redakcyjnego ujęcia, poważnie wpłynęły na kształt skryptu. Pragnę mu podziękować za to bardzo serdecznie. Miło mi także złożyć wyrazy podziękowania panu Maciejowi Sablikowi za wiele cennych uwag i spostrzeżeń, które wykorzystałam, przygotowując ten skrypt. *Last but not least* – dziękuję pani Aleksandrze Hankus za wykonanie składu komputerowego tekstu, panu Adamowi Stolarzewiczowi za komputerowe zaprojektowanie rysunków oraz panu Adamowi Kolany za przetłumaczenie ich na język postscript-u.

Joanna Ger

Katowice, 15 kwietnia 2003 roku

Skorowidz

Aksjomat ciągłości, 28

alternatywa, 11, 12

asymptota

 pionowa, 221

 ukośna, 220

Całka

 bezwzględnie zbieżna, 275

 dolna, 247, 327

 górną, 247, 327

 iterowana, 333

 krzywoliniowa niezorientowana, 366

 krzywoliniowa zorientowana, 369

 nieoznaczona, 232

 niewłaściwa, 271

 odwzorowania, 400

 powierzchniowa niezorientowana, 387

 powierzchniowa zorientowana, 391

 Riemanna, 247, 327

 warunkowo zbieżna, 275

 zbieżna, 275

cecha, 32

ciąg

 granica, 116

 malejący, 120

 monotoniczny, 114, 120

 rosnący, 113

 rozbieżny do nieskończoności, 132

 wektorów, 135

ciało, 86

cyrkulacja pola, 384

Ekstremum

 absolutne, 172

 lokalne, 172

 warunkowe, 317

Funkcja

 całkowalna, 233, 234

 Dirichleta, 32

 górną granicę całkowania, 263

 klasy C^n , 204

 malejąca, 31

 monotoniczna, 30

 niemalejąca, 30

 nieparzysta, 31

 nierosnąca, 30

 okresowa, 31

 parzysta, 31

 pierwotna, 231

 różniczkowalna w przedziale, 193

 różniczkowalna w punkcie, 192

 rosnąca, 30

 słabo malejąca, 30

 słabo rosnąca, 30

 silnie malejąca, 30

 silnie rosnąca, 30

 wartość średnia, 205

 wymierna, 34

 zdaniowa, 12, 14

funkcje elementarne, 34

 ciągłość, 168

 cyklometryczne, 34

 homografie, 34

 logarytmiczne, 36

 potęgowe, 34

 trygonometryczne, 44

 wielomiany, 34

 wykładnicze, 36

 wymierne, 34

Gradient, 292

grupa, 84

 przemienne, 85

- Iloczyn**
 kartezyjski, 19
 skalarny, 96
 zbiorów, 15
 iloraz różnicowy, 191
 implikacja, 11
- Jednokładność**, 108
- Koniunkcja**, 11
 kryterium
 Cauchy'ego, 142
 d'Alemberta, 144
 porównawcze, 140, 142
 krzywa, 278
 parametryzacja, 278
 regularna, 279
- kula, 98
- kwantyfikator
 duży, 14
 mały, 14
- Liczba zespolona**, 51
 argument, 56
 postać trygonometryczna, 56
 sprzężona, 52
 wartość bezwzględna, 55
- Macierz**, 61
 diagonalna, 67
 iloczyn, 62
 jednostkowa, 65
 kwadratowa, 61
 minor, 66
 nieosobliwa, 71
 odwrotna, 71
 rząd, 79
 stopień, 61
 suma, 62
 transponowana, 65
 uzupełniona, 80
 wyznacznik, 65
- maksimum
 absolutne, 172
 lokalne, 172
- minimum
 absolutne, 172
- lokalne, 172
- Negacja**, 12
 nierówność Schwarza, 95, 260
- Obrót**, 109
 obszar normalny, 340
 odwzorowanie, 17
 ciągłość, 165
 granica, 159
 jednostajna ciągłość, 167
 liniowe, 99
 odwracalne, 18
 odwrotne, 20
 różniczka, 203
 różnowartościowe, 18
 superpozycja, 18
 wartości własne, 105
 wykres, 20
- orientacja, 361
 krzywej, 362
 płata, 391
 otoczenie, 153
- Para uporządkowana**, 19
 płaszczyzna styczna, 348
 płat powierzchniowy, 347
 pewnik Archimidesa, 29
- pochodna
 cząstkowa, 289
 funkcji, 191
 kierunkowa, 289
 lewostronna, 193
 mieszana, 301
 odwzorowania, 291
 prawostronna, 193
- pole wektorowe, 380
 potencjał pola, 380
 problem Cauchy'ego, 402
 prosta styczna, 194
- przedział
 domknięty, 26
 otwarty, 26
- przestrzeń
 euklidesowa, 97
 liniowa, 87

- punkt
przebiegła, 219
- Reguła de l'Hospitala**, 221
- różnica zbiorów, 15
- różniczka, 203
- równanie charakterystyczne, 105
- równanie różniczkowe
Bernoulliego, 420
liniowe o stałych współczynnikach, 431
liniowe rzędu pierwszego, 414
o zmiennych rozdzielonych, 410
zwyczajne, 401
- reszta
Cauchy'ego, 216
Lagrange'a, 216
- rotacja pola, 380
- Sąsiedztwo**, 154
- Schrödingera równanie, 436
- suma
dolna, 246
górną, 246
zbiorów, 15
- symbol Newtona, 25
- szereg
geometryczny, 139
harmoniczny, 138
liczbowy, 136
Maclaurina, 227
potęgowy, 148
promień zbieżności, 149
przedział zbieżności, 150
przemienny, 147
suma, 136
Taylora, 227
zbieżny, 136
- Twierdzenie**
Bolzano–Weierstrassa, 121
Cauchy'ego, 145, 206
Cauchy'ego–Hadamarda, 149
Cramera, 75
Gaussa–Ostrogradskiego, 394
Greena, 373
Kroneckera–Capelliego, 81
- Lagrange'a, 206
o całkowalności funkcji ciągłych, 249
o całkowaniu przez części, 267
o całkowaniu przez podstawienie, 267
o funkcji uwikłanej, 312, 316
o istnieniu i jednoznaczności, 403
o lokalnej odwracalności odwzorowań, 298
o trzech ciągach, 127
o wartości średniej, 269
o zmianie zmiennych, 268, 344
Rolle'a, 205
Stokesa, 396
- Układ**
Cramera, 74
jednorodny, 78
sprzężony, 81
ułamek prosty, 238
- Warunek trójkąta**, 94
- własność Darboux, 175
- wektory
długość, 94
liniowo niezależne, 88
liniowo zależne, 89
prostokątne, 97
równoległe, 97
własne, 104
- wielomian charakterystyczny, 105
- wyrażenie nieoznaczone, 221
- wzór
Cramera, 76
de Moivre'a, 57
Maclaurina, 216
Newtona–Leibniza, 265
Taylora, 216
- Zaprzeczenie**, 12
- zbiór
brzeg, 156
domknięcie, 156
domknięty, 155
dopełnienie, 15
kres dolny, 28
kres górny, 28

nieprzeliczalny, 19
nieskończony, 16
ograniczony, 27, 157
ograniczony z dołu, 27
ograniczony z góry, 27
otwarty, 154
podzbiór, 15
przeliczalny, 19

punkt izolowany, 157
punkt skupienia, 156
skończony, 16
wnętrze, 154
zwarty, 158
zbiory
równoliczne, 19
rozłączne, 15

Redakcja
Grażyna Wojdała

Skład i łamanie
Aleksandra Hankus

Copyright © 2012 by
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego
Wszelkie prawa zastrzeżone

ISSN 1644-0552
ISBN 978-83-226-2142-4
(wersja drukowana)
ISBN 978-83-8012-542-1
(wersja elektroniczna)

Wydawca
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice
www.wydawnictwo.us.edu.pl
e-mail: wydawus@us.edu.pl

Wydanie V. Nakład 150 + 50 egz. Ark. wyd. 27,5.
Ark. druk. 28. Papier offset kl. III, 90 g.
Cena 38 zł (+VAT)

Druk i oprawa: PPHU TOTEM s.c.
M. Rejnowski, J. Zamiara
ul. Jacewska 89, 88-100 Inowrocław

Joanna Ger – Kurs matematyki dla chemików

Cena 38 zł (+ VAT)

ISSN 1644-0552
ISBN 978-83-8012-542-1