Wstęp

Teoria operatorów na przestrzeni Hilberta stanowi jedno z wielkich osiągnięć analizy funkcjonalnej i znajduje zastosowania w niezliczonych działach matematyki i fizyki. Tematyka ta jest także punktem wyjścia dla fascynujących uogólnień takich jak teoria C*-algebr, algebr von Neumanna, a także nieprzemienna geometria i wiele innych gałęzi współczesnej matematyki. Niniejsza książka oparta jest na rozszerzonej wersji notatek do wykładu prowadzonego przez autora na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, a w konsekwencji jej podstawowymi celami są:

- przedstawienie kanonu wiedzy z zakresu teorii operatorów na przestrzeniach Hilberta wraz z kompletnymi i możliwie bezpośrednimi dowodami,
- przygotowanie czytelnika do dalszych studiów zarówno samej teorii operatorów, jak i teorii algebr operatorów (C*-algebr i algebr von Neumanna).

Ocena stopnia realizacji pierwszego z powyższych celów zależy od tego, co uznamy za kanon wiedzy na temat operatorów na przestrzeniach Hilberta. Faktem jest, że pewne fragmenty tej teorii zostały z premedytacją pominięte – także po to, aby książka nie zamieniła się w opasły tom. Ważniejszym jednak powodem okrojenia materiału do niezbędnego minimum jest istnienie ogromnej ilości wspaniałych monografii i podręczników, które pokrywają znacznie większy zakres materiału z omawianej dziedziny (np. [AkGl, Kat, ReSi_1, ReSi_2] i szczególnie [Mau]). Jednak studiowanie ich może okazać się dość trudnym wyzwaniem, do którego dobrym przygotowaniem może być lektura niniejszej książki.

Materiał podzielony jest na dwie główne części. Pierwsza z nich poświęcona jest operatorom ograniczonym, a druga – operatorom nieograniczonym. W pracy z tymi ostatnimi zastosowaliśmy nowe i bardzo użyteczne narzędzie wprowadzone do literatury światowej przez S.L. Woronowicza. Jest to tak zwana z-transformata operatora domkniętego. Wyprzedzając szczegółowe wprowadzenie z-transformaty w rozdziale 9, powiemy, iż jest ona formą zakodowania pełnej informacji o domkniętym i gęsto zdefiniowanym operatorze na przestrzeni Hilberta w operatorze ograniczonym na tej przestrzeni. Co więcej, pozwala ona na łatwe i eleganckie uzyskanie wielu ważnych wyników teorii.

Spośród wspaniałych podręczników umieszczonych w spisie literatury na końcu książki większość oferuje wykład rozwijający najpierw pewne fragmenty teorii algebr Banacha i C*-algebr, a następnie wyprowadzający z nich najważniejsze twierdzenia teorii operatorów, a dokładniej wszelkie wersje twierdzenia spektralnego. Oznacza to jednak, iż czytelnik musi najpierw zmierzyć się z dość wyrafinowaną analizą funkcjonalną, aby potem zastosować ją w konkretnych przypadkach pochodzących z teorii operatorów. Filozofia wykładu zawartego w niniejszej książce jest inna: teoria spektralna operatorów samosprzężonych (ograniczonych i nieograniczonych) jest przedstawiona bez głębokiego zanurzania się w teorię algebr Banacha. Warto pamiętać, że właśnie teoria algebr Banacha (w tym C*-algebr i algebr von Neumanna) stanowi naturalne uogólnienie teorii operatorów na przestrzeniach Hilberta. Dlatego też algebry Banacha, które pojawiają się w różnych fragmentach książki, grają rolę ciekawych przykładów, a nie kluczowych narzędzi.[1] W nadziei autora takie podejście do teorii operatorów stanowi choć częściową realizację drugiego z wymienionych powyżej celów książki.

Ponieważ książka ma stanowić niezbyt obszerne kompendium – czy może poradnik – teorii operatorów, wykład został celowo pozbawiony ćwiczeń i przykładów. Na końcu każdego rozdziału znajdują się notatki wskazujące pozycje literatury, w których można znaleźć doskonałe przykłady i ćwiczenia z omawianych działów. Dodatkowo umieszczamy tam czasem krótkie informacje o możliwych uogólnieniach i wycieczki w bardziej wyrafinowane tematy.

Wykłady, na których oparta jest koncepcja książki były przeznaczone dla studentów, którzy mieli już za sobą kursy analizy matematycznej (z teorią całki), algebry liniowej i tak zwany kurs „Analizy Funkcjonalnej I”. Ten ostatni wykład obejmuje zazwyczaj podstawy teorii przestrzeni Banacha, w tym liczne informacje na temat przestrzeni Hilberta. W szczególności zakładamy znajomość:

- podstawowej analizy matematycznej i algebry liniowej,
- podstaw topologii ogólnej (pojęcia przestrzeni lokalnie zwartej, ciągu uogólnionego i jego granicy, twierdzenia Stone'a–Weierstrassa),
- elementarnej analizy zespolonej jednej zmiennej (pojęcia holomorficzności, wzoru Cauchy'ego, twierdzenia Liouville'a) i wielu zmiennych (pojęcia holomorficzności i wielowymiarowego wzoru Cauchy'ego),
- teorii miary i całki (w szczególności twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej, miar produktowych i twierdzenia Fubiniego, miar zespolonych,

[1] Wyjątkiem jest rozdział 7, w którym korzystamy z kilku podstawowych elementów teorii C*-algebr szczegółowo opisanych w uzupełnieniu U.5.2.

wariacji miary, twierdzenia Radona–Nikodyma, twierdzenia Riesza o reprezentacji),
- pojęcia przestrzeni Banacha i przestrzeni Hilberta, przestrzeni L_p, operatora ograniczonego i normy operatorowej, otwartości zbioru operatorów odwracalnych,
- lematu Riesza (czyli twierdzenia o reprezentacji ciągłego funkcjonału na przestrzeni Hilberta) i związku ograniczonych form półtoraliniowych i operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta, pojęcia operatora sprzężonego do ograniczonego operatora na przestrzeni Hilberta.

Będziemy także używać pojęcia całki z funkcji ciągłej na zwartym przedziale o wartościach w przestrzeni Banacha. Jest to zagadnienie omawiane zapewne na każdym kursie równań różniczkowych. W wersji znacznie ogólniejszej teoria takich całek przedstawiona jest np. w książce [Rud$_2$].

Praktycznie każde z powyższych zagadnień należy do standardowego kursu analizy, analizy zespolonej i teorii miary. Podręczniki takie jak [ReSi$_1$, Rud$_1$] obejmują znakomitą większość z nich. Dla wygody czytelnika w uzupełnieniach zebraliśmy kilka najpotrzebniejszych wyników (w tym klasyczne twierdzenia analizy funkcjonalnej takie jak twierdzenie Banacha–Steinhausa, twierdzenie o odwzorowaniu otwartym, czy twierdzenie o wykresie domkniętym) z możliwie krótkimi i nowoczesnymi dowodami.

Wszystkie rozważane przestrzenie wektorowe będą nad ciałem liczb zespolonych. Będziemy również stosować pewne konwencje notacyjne znane z literatury fizycznej. W szczególności iloczyn skalarny (oznaczany symbolem $\langle\cdot|\cdot\rangle$) będzie zawsze liniowy w *drugim* argumencie. Ponadto będziemy używać bardzo wygodnej notacji „bra” i „ket”, którą pokrótce wyjaśnimy. Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Wówczas każdy wektor $\psi \in \mathcal{H}$ wyznacza dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\mathbb{C} \to \mathcal{H}$ przeprowadzające $1 \in \mathbb{C}$ na $\psi \in \mathcal{H}$. Oznaczamy je symbolem $|\psi\rangle$.

Teraz rozważmy na $\mathbb{C}$ standardową strukturę przestrzeni Hilberta (czyli taką, przy której $\{1\}$ jest bazą ortonormalną). Możemy wówczas rozważyć odwzorowanie sprzężone $|\psi\rangle^*$ do $|\psi\rangle$, które jest ograniczonym funkcjonałem na $\mathcal{H}$ przeprowadzającym dowolny wektor φ na liczbę $\langle\psi|\varphi\rangle \in \mathbb{C}$. Odwzorowanie to oznaczamy symbolem $\langle\psi|$. W szczególności złożenie $\langle\psi_1| \circ |\psi_2\rangle$ jest odwzorowaniem liniowym $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polegającym na mnożeniu przez skalar $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$, natomiast złożenie $|\psi_2\rangle \circ \langle\psi_1|$ (zapisywane jako $|\psi_2\rangle\langle\psi_1|$) jest odwzorowaniem $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ przeprowadzającym dowolny $\varphi \in \mathcal{H}$ na $\langle\psi_1|\varphi\rangle\,\psi_2$.

Ważnym wzorem znanym z teorii przestrzeni z iloczynem skalarnym, z którego będziemy intensywnie korzystać jest *formuła polaryzacyjna*. Ma ona najróżniejsze – czasem całkiem wyrafinowane – sformułowania, lecz my skorzystamy z następującej prostej wersji: niech F będzie formą półtoraliniową (antyliniową względem pierwszego argumentu) na przestrzeni wektorowej $\mathcal{H}$. Wówczas

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k F(\eta + \mathrm{i}^k\xi, \eta + \mathrm{i}^k\xi), \qquad \xi,\eta \in \mathcal{H}.$$

Materiał książki jest w miarę możliwości zorganizowany w sposób liniowo uporządkowany, tj. kolejny rozdział korzysta z wyników poprzedniego. Wyjątkami są przede wszystkim rozdział 6 poświęcony pojęciu śladu operatora i rozdział 7 omawiający rachunek funkcyjny dla rodzin operatorów samosprzężonych i dla operatorów normalnych. Wyniki tych rozdziałów nie są wykorzystywane w dalszych częściach książki. Kolejny wyjątek stanowi rozdział 10 poświęcony teorii spektralnej operatorów nieograniczonych. Wyniki tam przedstawione są potrzebne dopiero w rozdziale 12.

Jak już wspomnieliśmy, w części 3 zgromadzony został dodatkowy materiał potrzebny w różnych fragmentach kursu. Pierwszym umieszczonym tam wynikiem jest twierdzenie Banacha–Steinhausa (uzupełnienie U.1), z którego korzystamy od samego początku książki. Z kolei twierdzenie Dynkina o $\boldsymbol{\pi}$- i $\boldsymbol{\lambda}$-układach umieszczone w uzupełnieniu U.2 wykorzystujemy w rozdziale 4, a informacje o iloczynie tensorowym przestrzeni Hilberta (uzupełnienie U.3) są potrzebne w rozdziale 6 (dokładniej w podrozdziale 6.3). Twierdzenie o wykresie domkniętym (umieszczone w uzupełnieniu U.4) potrzebne jest w całej części 2. Wreszcie uzupełnienie U.5 poświęcone ilorazom przestrzeni Banacha i C*-algebr zawiera wyniki potrzebne we wspomnianym powyżej rozdziale 7.

Pragnę podziękować mojemu mistrzowi profesorowi Stanisławowi L. Woronowiczowi za lata pracy, w czasie których przekazał mi część swojej wiedzy na temat operatorów na przestrzeniach Hilberta. Dziękuję również kolegom, współpracownikom i studentom z Katedry Metod Matematycznych Fizyki Wydziału Fizyki oraz z Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego oraz innych instytucji, w tym szczególnie Katarzynie Budzik, Pawłowi Czajce, Janowi Derezińskiemu, Danielowi Siemssenowi, Pawłowi Strzeleckiemu oraz Włodzimierzowi Ślęzakowi, za cenne uwagi i rady dotyczące materiału zawartego w książce.

Piotr Mikołaj Sołtan
Warszawa, lipiec 2018