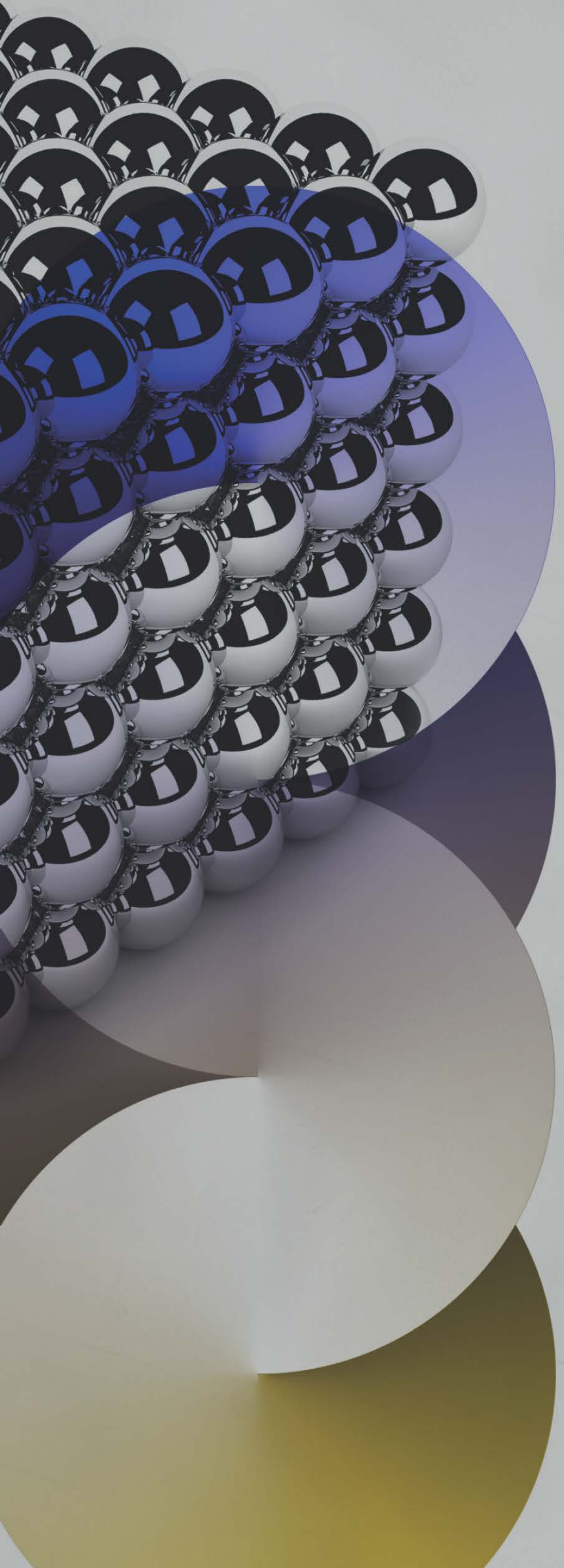

Biblio
theca
Philoso
phica

3(2018)

Marek Nowak

Elementy teorii mnogości

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Marek Nowak

ELEMENTY TEORII MNOGOŚCI

ŁÓDŹ 2018

Spis treści

Wstęp

Niniejsza praca poświęcona jest teorii mnogości Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru, nazywanej w skrócie teorią ZFC (Z, F – pierwsze litery nazwisk jej twórców, C – pierwsza litera wyrazu *choice*, *axiom of choice* – aksjomat wyboru). Jest to teoria pierwszego rzędu, a więc klasa zdań ustalonego języka pierwszego rzędu zamknięta na relację wynikania. Zazwyczaj teoria pierwszego rzędu mająca zastosowanie gdzieś poza teorią modeli podawana jest w postaci aksjomatycznej, tzn. traktowana jako klasa wszystkich zdań ustalonego języka wynikających z ustalonego zbioru zdań zwanych aksjomatami tej teorii. Właśnie w takiej postaci teoria ZFC jest tu prezentowana.

Praca stanowi istotne rozszerzenie części rozdziału 2 z [11]. Przeznaczona jest dla humanistów niebędących matematykami (np. filozofów wykorzystujących teorię mnogości), ma więc charakter elementarny. Niemniej zakładamy znajomość aparatury pojęciowej logiki kwantyfikatorów z identycznością (logiki pierwszego rzędu), w szczególności znajomość języka tej logiki oraz metod dowodzenia zdań tego języka (zob. np. [3], [5], [16], [18], [19]). Bibliografia została ograniczona do pozycji „klasycznych".

Panom profesorom Andrzejowi Indrzejczakowi i Piotrowi Łukowskiemu oraz Recenzentowi tekstu, profesorowi Andrzejowi Pietruszczakowi, serdecznie dziękuję za cenne uwagi, istotnie ulepszające pierwotny tekst. Wyrazy podziękowania składam również pani mgr Beacie Promińskiej za trud włożony w redakcyjne opracowanie tekstu do druku.

§1. Wprowadzenie do zagadnień teorii mnogości

Język teorii mnogości wyposażony jest w jedyny pierwotny predykat 2-argumentowy $\in$ (naturalnie poza predykatem identyczności: $=$, traktowanym jako stała logiczna) i nie zawiera żadnych pierwotnych stałych indywidualnych ani pierwotnych symboli funkcyjnych. Predykat „$\in$" czytamy: „należy do" lub „jest elementem" (używamy zapisu: $x \notin y$ jako równoznacznego z negacją formuły atomowej: $x \in y$).

Teoria ZFC może być więc traktowana jako jedna z teorii ustalających i precyzujących znaczenie terminu: „jest elementem mnogości (zbioru)" czy też „jest częścią mnogości". Historycznie pierwszą z takich teorii formalnych jest tzw. naiwna teoria mnogości, sformułowana nieaksjomatycznie w drugiej połowie XIX stulecia przez Georga Cantora. Miała ona fundamentalny mankament – była sprzeczna. Sformułowanie teorii niesprzecznej, lecz zachowującej podstawowe intuicje znaczeniowe Cantora stało się celem badań na początku XX w. Jednym z owoców tych badań jest właśnie teoria ZFC. Aby przybliżyć owe intuicje Cantora, rozważmy przez chwilę tzw. aksjomatyczną teorię naiwną. Określają ją następujące aksjomaty:

$(Ax =)$ $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$,

$(AxCan)$ $\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \phi(x))$,

gdzie $\phi(x)$ jest formułą języka teorii, w której x jest przynajmniej jedną zmienną wolną oraz w której y nie jest zmienną wolną.

$(Ax =)$ zwany jest aksjomatem identyczności lub ekstensjonalności. $(AxCan)$ zwany jest aksjomatem lub pewnikiem Cantora. Nie jest to właściwie aksjomat (formuła języka), lecz schemat aksjomatu: w zależności od konkretnej postaci formuły $\phi(x)$ uzyskujemy z $(AxCan)$ konkretny aksjomat teorii.

Oba aksjomaty mają na celu formalnie ujmować następującą intuicję: dla dowolnie pomyślanej własności istnieje zbiór (mnogość) tych i tylko tych obiektów, którym ta własność przysługuje. Owa własność reprezentowana jest formalnie formułą $\phi(x)$ w $(AxCan)$. Właśnie $(AxCan)$ stwierdza istnienie zbioru y tych i tylko tych obiektów x, którym „własność” $\phi(x)$ przysługuje. Jednakże samo wyrażenie $(AxCan)$ nie wystarcza dla oddania owej intuicji. Niejawnie bowiem jest w niej mowa o dokładnie jednym zbiorze tych i tylko tych obiektów, którym dana własność przysługuje. Tymczasem $(AxCan)$ nie gwarantuje wcale istnienia dokładnie jednego zbioru y złożonego z obiektów x, dla których prawdą jest, że $\phi(x)$. Przykładowo rozważmy $\phi(x)$ postaci

$\forall z (x \neq z \Rightarrow x \in z)$,

odpowiadającą własności: jest częścią czegokolwiek różnego od siebie. Wówczas z $(AxCan)$ otrzymujemy zdanie:

$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \forall z (x \neq z \Rightarrow x \in z))$.

Zinterpretujmy je w strukturze relacyjnej $(\{a, b, c\}, \in)$, gdzie a, b, c są różnymi od siebie obiektami oraz relacja $\in$ (nie odróżniana tu symbolicznie od predykatu $\in$) jest taka, że $c \in a$ i $c \in b$. Wówczas łatwo sprawdzić, że prawdziwe są formuły:

$\forall x (x \in a \Leftrightarrow \forall z (x \neq z \Rightarrow x \in z))$ oraz

$\forall x (x \in b \Leftrightarrow \forall z (x \neq z \Rightarrow x \in z))$

(nie odróżniamy tu obiektów a, b od stałych indywidualnych będących ich nazwami w tej interpretacji), tzn. istnieją dwa różne „zbiory” y dla których prawdą jest

$\forall x (x \in y \Leftrightarrow \forall z (x \neq z \Rightarrow x \in z))$.

Dodanie aksjomatu $(Ax{=})$ powoduje, że ów zbiór y, którego istnienie stwierdza $(AxCan)$ jest dokładnie jeden. $(Ax =)$ stwierdza utożsamienie zbiorów mających te same elementy. W podanej tu przykładowo interpretacji oczywiście $(Ax =)$ jest fałszywy, bowiem obiekty a, b mają jedyny element c (jeden i ten sam), nie są zaś identyczne.

Bardziej ogólnie, załóżmy, że w obecności $(Ax =)$, dla ustalonej (konkretnej) formuły $\phi(x)$ prawdziwe są dwie formuły uzyskane z $(AxCan)$:

(1) $\forall x(x \in a \Leftrightarrow \phi(x))$ oraz

(2) $\forall x(x \in b \Leftrightarrow \phi(x))$.

Wówczas mamy:

(3) $\forall x(x \in a \Leftrightarrow x \in b)$.

Weźmy bowiem dowolny x i w celu pokazania równoważności: $x \in a \Leftrightarrow x \in b$, załóżmy, że $x \in a$. Wówczas z (1) mamy: $\phi(x)$, zatem z (2): $x \in b$. Tym samym mamy implikację: $x \in a \Rightarrow x \in b$. Dowód implikacji odwrotnej: $x \in b \Rightarrow x \in a$, jest analogiczny.

(3) w połączeniu z $(Ax =)$ w postaci: $\forall x(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$, prowadzi do: $a = b$. Zatem zbiór, którego istnienie stwierdza $(AxCan)$ (dla ustalonej $\phi(x)$) jest dokładnie jeden.

Niestety, jak wiadomo, intuicja, której formalnym ujęciem są aksjomaty $(Ax =), (AxCan)$ okazuje się naiwna, ponieważ jest nieuzasadniona, by nie rzec fałszywa. Teoria oparta na tych aksjomatach jest bowiem sprzeczna (tzn. jest zbiorem wszystkich zdań swojego języka). Rozważmy mianowicie formułę $\phi(x)$ postaci: $x \notin x$, uzyskując z $(AxCan)$ aksjomat:

$\exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \notin x)$.

Oznaczmy ów jedyny zbiór, którego istnienie ta formuła stwierdza symbolem „a". Wówczas

$\forall x(x \in a \Leftrightarrow x \notin x)$, a stąd

$a \in a \Leftrightarrow a \notin a$.

Zdanie to, będące przecież postaci $A \Leftrightarrow \neg A$, w żadnej interpretacji nie jest prawdziwe. Sprzeczność ta nosi nazwę antynomii Russella, przyczyniła się ona do rozwoju badań teoriomnogościowych owocujących innymi niż naiwna teoriami mnogości.

Teoria ZFC nie posiada przedstawionego mankamentu teorii naiwnej. Oparta jest ona na innym zestawie aksjomatów (zachowany jest aksjomat identyczności), jednakże formuły postaci $(AxCan)$ są w niej obecne, choć nie dla wszystkich formuł

$\phi(x)$. Z powodu obecności $(Ax =)$ w ZFC, zbiór y, którego istnienie stwierdza w teorii ZFC formuła $\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \phi(x))$, jest jedyny. W ogólności, jest on oznaczany w znany sposób, jako: $\{x : \phi(x)\}$ (zbiór wszystkich takich x, że $\phi(x)$).

Zatem w teorii ZFC również stwierdza się istnienie zbiorów, których elementami są te i tylko te zbiory, którym przysługuje „własność" $\phi(x)$. Jednakże nie dla każdej „własności" taki zbiór istnieje. Przykładowo, można wykazać w ZFC, że, zgodnie z krytyką Russella teorii naiwnej, nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów nie będących swoimi elementami ($\phi(x)$ postaci : $x \notin x$), co (w obecności aksjomatu regularności) jest równoważne nieistnieniu zbioru wszystkich zbiorów; innym przykładem jest nieistnienie zbioru wszystkich liczb porządkowych ($\phi(x)$ postaci: x *jest liczbą porządkową*).

Rozdział 1. Aksjomatyka ZFC i podstawowe pojęcia teoriomnogościowe

§1. Aksjomaty teorii mnogości

W literaturze przedmiotu spotyka się różne zestawy aksjomatów teorii ZFC (por. np. [4], [6], [7], [10], [12], [14], [17], [20], [21]). Wybieramy zestaw ośmiu aksjomatów z encyklopedycznej wersji teorii ZFC [20]. Aksjomaty są formułami, w których poza stałymi logicznymi, tzn. spójnikami $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, kwantyfikatorami $\forall, \exists$ i predykatem identyczności $=$, występują zmienne indywidualne x, y, z, u, v, w oraz jedyny predykat: $\in$.

Adekwatne objaśnienie znaczenia niektórych aksjomatów jest możliwe dopiero po wprowadzeniu do teorii odpowiednich pojęć. Wówczas bowiem jest możliwy inny, równoważny zapis owych aksjomatów, w znacznie krótszej postaci, w której obok predykatu $\in$ pojawiają się symbole tych pojęć.

Aksjomat identyczności (lub ekstensjonalności):

$(Ax =)$ $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$.

Zbiór x jest tożsamy ze zbiorem y, o ile zachodzi $\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$, czyli gdy x, y mają te same elementy.

Aksjomat identyczności umożliwia definiowanie danego zbioru (o ile on istnieje) przez podanie, jakie zbiory są jego elementami. Wiedząc bowiem, jakie zbiory stanowią wszystkie elementy danego zbioru, mamy, dzięki $(Ax =)$, jednoznacznie ten zbiór wyznaczony.

Nie oznacza to, że dany zbiór można utożsamić z sekwencją czy ekspozycją jego elementów. Status ontyczny zbioru eksponowanych elementów jest taki sam jak status każdego z jego elementów (są to obiekty świata zbiorów), lecz różny od statusu ekspozycji.

Aksjomat Zermelo (lub podzbiorów albo selekcji):

$(AxZ)_\phi$ $\forall x(\phi(x) \Rightarrow x \in z) \Rightarrow \exists y \forall x(x \in y \Leftrightarrow \phi(x))$,

gdzie $\phi(x)$ jest dowolną formułą języka teorii, w której x jest przynajmniej jedną zmienną wolną oraz w której y nie jest zmienną wolną.

Podobnie jak rozważany wcześniej aksjomat Cantora, (AxZ) nie jest pojedynczym (konkretnym) aksjomatem teorii, lecz klasą aksjomatów, z której „wyjmuje" się konkretny aksjomat $(AxZ)_\phi$, dla konkretnej formuły $\phi(x)$.

Ponadto, jak widać, zmienna z jest w $(AxZ)_\phi$ zmienną wolną. Jednakże wszystkie formuły teorii ZFC (dotyczy to jakiejkolwiek teorii I rzędu), zatem również jej aksjomaty winny być domknięte, tzn. nie występują w nich zmienne wolne. Fakt, że w $(AxZ)_\phi$ pojawia się co najmniej jedna zmienna wolna z – być może w konkretnie wziętej formule $\phi(x)$ występują jeszcze inne zmienne wolne niż zmienna x, które to zmienne są wolne w całej formule $(AxZ)_\phi$ – jest oparty na powszechnie przyjętej konwencji notacyjnej, według której formułę $\psi(x_1, \ldots x_n)$, w której $x_1, \ldots x_n$ są wszystkimi jej zmiennymi wolnymi postrzega się jako formułę uniwersalnie domkniętą: $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\psi(x_1, \ldots x_n))$, tzn. przed ową formułą ze zmiennymi wolnymi „widzi" się kwantyfikatory uniwersalne wiążące wszystkie te zmienne wolne. W przypadku zapisu formuły $(AxZ)_\phi$ zastosowanie owej konwencji notacyjnej jest bardzo wygodne, bowiem to, jakie zmienne mają być wiązane kwantyfikatorami uniwersalnymi umieszczonymi przed $(AxZ)_\phi$ zależy przecież od konkretnej postaci formuły $\phi(x)$.

Widać, że następnik implikacji $(AxZ)_\phi$ jest identyczny z formułą $(AxCan)$. Funkcja jaką spełnia $(AxZ)_\phi$ w teorii ZFC jest więc podobna do tej jaką aksjomat Cantora pełni w naiwnej teorii mnogości. Mianowicie, dla konkretnej formuły $\phi(x)$, z aksjomatu $(AxZ)_\phi$ wnioskujemy również istnienie zbioru y tych i tylko tych zbiorów x, dla których zachodzi $\phi(x)$. Jednakże wnioskowanie to jest uprawnione jedynie wówczas, gdy $\phi(x)$ jest taką formułą, że spełniony jest poprzednik $(AxZ)_\phi : \forall x(\phi(x) \Rightarrow x \in z)$, gdzie z jest jakimś dowolnie wybranym, ustalonym zbiorem.

Stwierdzenie prawdziwości owego poprzednika zabezpiecza klasę aksjomatów (AxZ) przed sprzecznością. Bowiem to, że jest on prawdziwy, oznacza, że elementy zbioru y, którego istnienie stwierdza następnik w $(AxZ)_\phi$ należą do wcześniej danego zbioru z; innymi słowy, $(AxZ)_\phi$ umożliwia utworzenie zbioru y z elementów danego zbioru z, czyli utworzenie *podzbioru* zbioru z. Intuicyjnie rzecz ujmując, nie widać nic absurdalnego czy prowadzącego do sprzeczności w możliwości łączenia niektórych elementów danego zbioru (tutaj oznaczonego symbolem „z") w całość zwaną zbiorem (tutaj oznaczonym symbolem „y"). To zabezpieczenie przed sprzecznością powoduje jednakże, że siła dedukcyjna klasy formuł (AxZ) jest słabsza niż klasy formuł $(AxCan)$. Stąd teoria ZFC jest wyposażona w inne jeszcze aksjomaty niż teoria naiwna, tak, aby intuicyjnie pojmowany świat zbiorów, który miał być ujęty teorią naiwną, był opisany w teorii ZFC.

Z punktu widzenia historii rozwoju aksjomatyki teorii ZFC należy podkreślić, że aksjomat podany przez Zermelo oraz występujący w literaturze pod nazwą aksjomatu Zermelo ma właściwie postać następującą: