

# Rozdział 5

## Powierzchnie w przestrzeni Euklidesowej w $E^3$

### 5.1 Powierzchnia i jej przedstawienia parametryczne

**Definicja 5.1.** Zbiór  $X \subset E^3$  punktów przestrzeni euklidesowej  $E^3$  nazywamy płatem prostym, jeżeli istnieje odwzorowanie  $f$  wzajemnie jednoznaczne i ciągle domkniętego prostokąta  $D$  na zbiór  $X$ .

Wprowadzamy w przestrzeni  $E^3$  prostokątny układ osi współrzędnych i rozważmy zbiór punktów  $X$  punktów  $(x^1, x^2, x^3) \in E^3$  takich, że  $x^3 = f(x^1, x^2)$ , gdzie  $f$  jest funkcją określoną i ciągłą w domkniętym prostokącie

$$\mathcal{D} = \{(x^1, x^2) : x^1 \in [a, b] \wedge x^2 \in [c, d]\}$$

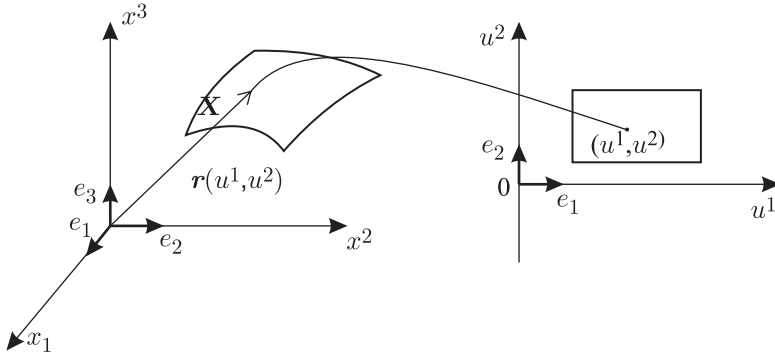
Tak określony zbiór  $X$  jest przykładem płata prostego. Rozważmy przestrzeń  $E^2$  odniesioną do prostokątnego układu osi współrzędnych, której elementami są punkty  $(u^1, u^2)$ . Wówczas płat prosty  $X$  możemy traktować jako hodograf ciągłej i różnowartościowej funkcji wektorowej

$$r(u^1, u^2) = [x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)] \quad (5.1)$$

określonej w domkniętym prostokącie  $\mathcal{D}$  (patrz rys. 5.1).

**Definicja 5.2.** Funkcję  $r(u^1, u^2)$  występującą we wzorze (5.1) nazywamy przedstawieniem parametrycznym płata  $X$ , zaś równanie (5.1) nazywamy równaniem parametrycznym tego płata, przy czym  $u^1$  i  $u^2$  nazywamy parametrami. Płatem prostym nie jest np. sfera lub powierzchnia boczna walca.

**Definicja 5.3.** Powierzchnią nazywamy zbiór  $S$  punktów przestrzeni euklidesowej  $E^3$ , jeżeli każdy punkt  $P \in S$  ma otoczenie  $V$  w zbiorze  $S$  homeomorficzne



Rysunek 5.1.

z podzbiorem otwartym przestrzeni euklidesowej  $E^2$ . Odwzorowanie  $f$  nazywamy homeomorfizmem gdy  $f$  jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym oraz odwzorowania  $f$  i  $f^{-1}$  są ciągłe.

**Definicja 5.4.** Otoczenie  $V$  punktu  $P$  w zbiorze  $S$  nazywamy część wspólną zbioru  $S$  i otwartego zbioru przestrzeni  $E^3$ , zawierającego punkt  $P$ .

Przykładem powierzchni może być np. sfera lub powierzchnia boczna walca.

Omówimy teraz sposoby określenia powierzchni w przestrzeni euklidesowej  $E^3$ . Powierzchnie w przestrzeni euklidesowej  $E^3$  można określić w następującej postaci:

– postać jawna:

$$x^3 = x^3(x^1, x^2) \quad \text{lub} \quad z = f(x, y) \quad (5.2)$$

– postać uwikłana:

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{lub} \quad F(x, y, z) = 0 \quad (5.3)$$

– postać parametryczna:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(u^1, u^2), & x^2 &= x^2(u^1, u^2), & x^3 &= x^3(u^1, u^2) \quad \text{lub} \\ x &= x(u^1, u^2), & y &= y(u^1, u^2), & z &= z(u^1, u^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

– postać wektorowa:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) = [x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)] \quad (5.5)$$

**Definicja 5.5.** Mówimy, że powierzchnia  $S$  jest klasy  $C^n$ , jeżeli każdy jej punkt ma otoczenie  $V$  w  $S$ , dla którego istnieje przedstawienie parametryczne (5.1) klasy  $C^n$ .

**Definicja 5.6.** Punkt  $P$  powierzchni (odpowiadający parametrom  $u_0^1, u_0^2$ ) nazywa się regularnym jeżeli

$$\mathbf{r}_1(u_0^1, u_0^2) \times \mathbf{r}_2(u_0^1, u_0^2) \neq 0 \quad (5.6)$$

gdzie

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$$

W przeciwnym razie (tzn. jeżeli w danym punkcie dla każdej parametryzacji  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0$ ) punkt nazywa się osobliwym.

**Definicja 5.7.** Powierzchnia nazywa się powierzchnią regularną w pewnym otoczeniu, jeżeli wszystkie jej punkty leżące w tym otoczeniu są regularne.

**Uwaga 5.1.** Jeżeli zamiast równania parametrycznego  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  rozpatrywać będziemy postać parametryczną (5.1), to warunek (5.6) sprowadzi się do postaci

$$\text{rang} \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} = 2 \quad (5.7)$$

gdzie  $x_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^j}$ ,  $k, j = 1, 2$ .

Punktami osobliwymi mogą być np. ostrza powierzchni w rodzaju wierzchołka stożka. Punkty te również mogą się układać wzdłuż pewnych linii i np. stanowić krawędzie, wzdłuż których powierzchnia się załamuje (krawędzie zwrotu).

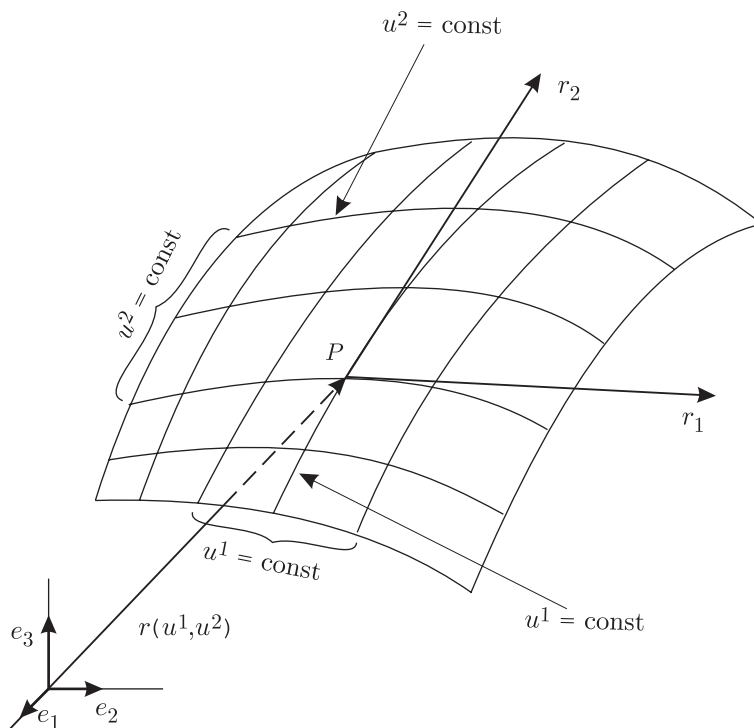
## 5.2 Współrzędne krzywoliniowe (współrzędne Gaussa)

Przy danym przedstawieniu parametrycznym  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$  wartości parametrów  $u^1, u^2$  określają położenie punktu na powierzchni.

**Definicja 5.8.** Parametry  $u^1, u^2$  noszą nazwę współrzędnych krzywoliniowych lub współrzędnych Gaussa na powierzchni.

Jeżeli ustalimy wartość jednej współrzędnej np.  $u^2$ , a drugą  $u^1$  będziemy zmieniali, to odpowiednie punkty będą leżały na linii określonej równaniem  $u^2 = \text{const}$ , którą nazywamy linią współrzędnej  $u^1$  lub krócej linią  $u^1$  (jest to na ogół linia krzywa, stąd nazwa „współrzędne krzywoliniowe”). Wszystkie linie  $u^1$  (dla różnych ustalonych  $u^2$ ) tworzą rodzinę, z której żadna para nie przecina się w obszarze nie zawierającym punktów osobliwych danej parametryzacji.

Linie  $u^1 = \text{const}$  przy zmiennym  $u^2$ , zwane liniami współrzędnej  $u^2$ , tworzą podobną rodzinę. Obie rodziny razem tworzą siatkę linii współrzędnych na powierzchni. Przez każdy regularny punkt danej parametryzacji przechodzi dokładnie po jednej krzywej z każdej rodziny (patrz rys. 5.2).



Rysunek 5.2.

**Przykład 5.1.** [płaszczyzna] Wybierając odpowiednio układ współrzędnych w przestrzeni możemy płaszczyznę przedstawić równaniem

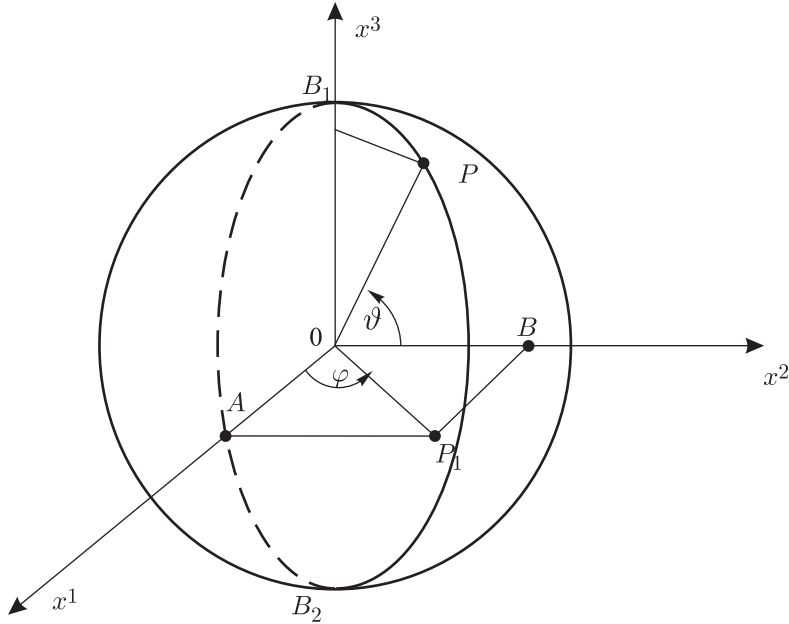
$$x = u^1, \quad y = u^2, \quad z = 0$$

przy czym  $u^1, u^2$  są w tym przypadku zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi na płaszczyźnie i będziemy je zwykle oznaczać jako  $x$  i  $y$ . Czyli mamy  $r = [u^1, u^2, 0]$ .

**Przykład 5.2.** [współrzędne geograficzne na sferze] Rozważmy sferę o środku w początku układu i promieniu  $a$ :  $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = a^2$ .

Położenie punktu  $P$  na sferze  $S$  określimy za pomocą dwóch współrzędnych: szerokości i długości geograficznej, w tym celu przez  $P$  i oś  $0x^3$  poprowadzimy płaszczyznę (płaszczyznę południka) i długością geograficzną nazwiemy kąt  $\varphi$  od płaszczyzny  $x^1x^3$  do skonstruowanej płaszczyzny mierzony w kierunku dodatnim (od osi  $0x^1$  do  $0x^2$ ).

Szerokość geograficzna określa położenie punktu na wybranym południku. Jest nią kąt  $\vartheta$  utworzony przez prostą  $OP$  z płaszczyzną  $x^1x^2$ , liczony ze znakiem „+”, gdy  $P$  leży na górnej półkuli i ze znakiem „-” w przeciwnym przypadku. Obie współrzędne określają całkowicie położenie punktu na sferze. Zmieniając



Rysunek 5.3.

$\vartheta$ ,  $\varphi$  w przedziałach  $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  otrzymujemy całą sferę. Dla biegunów (punktów przecięcia z osią  $0x^3$ ) jest  $\vartheta = \pm\pi/2$ , zaś  $\varphi$  nie jest jednoznacznie określony.

Oznaczmy przez  $x^1, x^2, x^3$  współrzędne punktu  $P$ . Mamy  $0P_1 = a \cos \vartheta$ ,  $0A = a \cos \vartheta \cos \varphi$ ,  $0B = a \cos \vartheta \sin \varphi$ ,  $0C = a \sin \vartheta$ , gdzie  $P_1$  – rzut prostokątny punktu  $P$  na płaszczyznę  $0x^1x^2$ ,  $A, B$  – rzuty prostokątne punktu  $P_1$  na osie  $0x^1$  i  $0x^2$  odpowiednio. Zatem równania parametryczne sfery mają postać

$$x^1 = a \cos \vartheta \cos \varphi, \quad x^2 = a \cos \vartheta \sin \varphi, \quad x^3 = a \sin \vartheta \quad (5.8)$$

Obliczając  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ , w tym wypadku  $\mathbf{r}_\vartheta \times \mathbf{r}_\varphi$ , otrzymamy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a \sin \vartheta \cos \varphi, & -a \sin \vartheta \sin \varphi, & a \cos \vartheta \\ -a \cos \vartheta \sin \varphi, & a \cos \vartheta \cos \varphi, & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Jak łatwo zauważyć rang  $\mathbf{A} = 2$ , poza biegunami i ( $\vartheta = \pm\pi/2$ ), w których rang  $\mathbf{A} = 1$ . Zatem punkty  $B_1, B_2$  są punktami osobliwymi danego przedstawienia parametrycznego. Można wykazać, że punkty  $B_1$  i  $B_2$  nie są punktami osobliwymi sfery. Wystarczy w tym celu przyjąć np. płaszczyznę  $0x^1x^3$  jako płaszczyznę równika i wyznaczyć przedstawienie parametryczne tej sfery analogiczne do podanego wyżej.