Przedmowa

Podręcznik ten jest znacznym rozwinięciem wykładów, jakie w Uniwersytecie Jagiellońskim prowadziłem przez wiele lat dla studentów astronomii i przez kilka lat dla studentów fizyki. Wielka kariera rachunku tensorowego zaczęła się z powstaniem teorii względności. Obecnie stał się on niemal uniwersalnym aparatem matematycznym fizyki i wykroczył poza jej właściwy obszar, znajdując zastosowania w najszerzej pojętej mechanice ośrodków ciągłych. Z tego powodu adresuję podręcznik do szerokiego kręgu odbiorców: fizyków, astronomów, geofizyków oraz studiujących hydrodynamikę i teorię sprężystości (i nie wyróżniam teorii względności). Ze względu na to, że adresuję go do czytelników stosujących rachunek tensorowy w rozmaitych działach nauk ścisłych, nie podaję żadnych zastosowań, każdy bowiem wybór byłby arbitralny i sugerowałby, że ten obszar zastosowań jest najistotniejszy. Czytelnik sam zorientuje się, gdzie analizę tensorową należy stosować, np. rozpozna, że gdy równania Newtona wyrażające drugą zasadę dynamiki zapisze się we współrzędnych krzywoliniowych, takich jak sferyczne, to pochodną zwyczajną względem czasu trzeba zastąpić pochodną absolutną.

Książka ta ma spełniać dwa cele. Po pierwsze, jest podręcznikiem, co uzasadnia jej dużą objętość: daję studentowi sporo objaśnień i komentarzy, przez co treść nie jest zbyt skondensowana. Po drugie, mając podręcznikowy, czytelny charakter, jest monografią dla bardziej zaawansowanych użytkowników, bowiem znaczna część materiału, zwłaszcza w rozdziałach 4, 5 i 6 oraz większość rozdziału 7, jest tym użytkownikom potrzebna, a zarazem dostępna tylko w wysoce specjalistycznej literaturze i po polsku ukazuje się po raz pierwszy.

Znaczenie rachunku tensorowego kontrastuje z luką na polskim rynku wydawniczym. Ostatnie książki na ten temat ukazały się ponad czterdzieści lat temu i są trudno dostępne. Po nich wydano kilka podręczników teorii względności zaczynających się od zwięzłego wykładu analizy tensorowej ukierunkowanego na teorię Einsteina, zwykle niekompletnego — korzystają więc z niego tylko fizycy relatywiści. Co więcej, klasyczne podręczniki rachunku tensorowego są przestarzałe w sformułowaniu jego podstaw i nie pasują do kursu analizy matematycznej na politechnikach i uniwersytetach (nauki fizyczne), a tym bardziej odstają od wykładów dla studentów matematyki. To jest główny powód napisania tego podręcznika.

Rachunek tensorowy jest metodą analityczną geometrii różniczkowej, jest zatem kwestią konwencji, a przede wszystkim gustu autora, ile w książce będzie geometrii, a ile samych tensorów. Aby uniknąć nieporozumień, podkreślam, że jest to podręcznik analizy tensorowej, a nie zastosowań geometrii w naukach fizycznych. O geometrii mówię więc tyle, ile potrzeba, by pokazać moc i użyteczność tej analizy. Jeśli chodzi o poziom abstrakcji i nowoczesności, to przyjąłem tutaj etap pośredni między nowoczesną geometrią formułowaną bez użycia współrzędnych a klasycznym podejściem do tensorów, w którym wszystko wyraża się za pomocą składowych. Ujęcie klasyczne okazało się, po niemal stu latach używania tensorów, bardziej praktyczne, lecz trudno w nim wyrazić, czym właściwie jest tensor i w jakich przestrzeniach istnieje. Tego dostarcza ujęcie nowoczesne.

Tradycyjnie mówi się, że tensor działa w n–wymiarowej przestrzeni Riemanna lub przestrzeni niemetrycznej. Chcę pokazać ogromne bogactwo tych przestrzeni i dlatego przeznaczyłem cały obszerny rozdział na zdefiniowanie i przedstawienie rozmaitości różniczkowych. Wektor definiuję jako operator różniczkowy działający w przestrzeni funkcji gładkich na rozmaitości, bo to pozwala zrozumieć wiele rzeczy i jest naturalne nie tylko dla fizyków zaznajomionych z mechaniką kwantową. Z doświadczenia wiem, że przejście od czysto algebraicznego pojęcia wektora do obiektu geometrycznego w przestrzeni stycznej sprawia wielu uczącym się trudności i omawiam tę kwestię bardzo szczegółowo.

Definicje i podstawowe twierdzenia podaję w języku geometrii, natomiast większość rachunków najprościej jest prowadzić dla składowych tensorów. Cały wykład algebry i analizy tensorowej prowadzę od podstaw, bez zakładania jakiejś znajomości przedmiotu u czytelnika.

Styl tej książki różni się od rozpowszechnionego i przez wiele lat modnego, suchego i skrajnie lakonicznego stylu prezentacji matematyki nowoczesnej; w niektórych miejscach tekst może się wydać przegadany. Nie przestrzegałem również zasady, by jakąś informację podawać tylko raz, jest tu szereg powtórzeń, co z pewnego punktu widzenia jest mniej eleganckie, za to ułatwia lekturę czytelnikowi. Ponadto niektóre zagadnienia omawiam z paru różnych punktów widzenia, np. przestrzeń izotropową definiuję i opisuję na trzy różne sposoby, a potem jej własności wyrażam jeszcze za pomocą wektorów Killinga.

Wielkim nieobecnym są tu formy różniczkowe. Wywodzą się z rachunku tensorowego, a obecnie są niezależnym i rozbudowanym aparatem geometrii różniczkowej, mającym szerokie zastosowania w całej matematyce i fizyce. Umieszczanie ich w książce o analizie tensorowej byłoby więc niewłaściwe, nie mówiąc o tym, że ogromnie powiększyłoby jej objętość. Formy różniczkowe w $\mathbf{R}^n$ są obecnie przedstawione w standardowych podręcznikach z analizy matematycznej, a dla form na rozmaitościach istnieje znakomita książka Flandersa, która zupełnie się nie zestarzała, mimo że została napisana w 1963 r. (polskie wydanie ukazało się w 1969 r.). W konsekwencji zrezygnowałem z podawania twierdzeń całkowych, które obecnie formułuje się za pomocą form różniczkowych. Zrezygnowałem również z języka wiązek, gdyż poza samą geometrią ich praktyczne zastosowania są niewielkie. Sporo miejsca za to poświęcam pochodnej Liego ze względu na jej związek z wielkościami zachowywanymi.

Dla profesjonalnego matematyka przedstawiony tu wykład jest momentami zbyt drobiazgowy, ogólnie za mało zalgebraizowany i za mało ścisły. Ze ścisłości zrezygnowałem świadomie tam, gdzie przysłania jasność wywodu i gdzie fachowiec jest w stanie bez trudu ją przywrócić. Przyjmuję też za intuicyjnie oczywiste istnienie pewnych obiektów i ich własności tam, gdzie matematyk niebanalnym rozumowaniem tego istnienia dowodzi. Starałem się natomiast, w miarę możności, przestrzegać ścisłości w kwestiach, gdzie intuicja zawodzi: w konstruowaniu rozmaitości różniczkowych, definiowaniu wektorów, odwzorowań stycznych i pochodnej Liego oraz paru innych miejscach. Chcę dać czytelnikowi rozumienie, a nie tylko technikę rachunkową. Być może i dla matematyka interesujące będzie zobaczyć, jak wiele można zasadnie osiągnąć za pomocą niewielkiej tylko części potężnego aparatu abstrakcyjnej geometrii różniczkowej.

Zakładam, że czytelnik zna analizę matematyczną w przestrzeni euklidesowej na poziomie standardowego wykładu na politechnice lub uniwersytecie na kierunkach ścisłych (lecz nie na matematyce); przede wszystkim znajomość rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych i podawanych w ramach takiego wykładu najbardziej elementarnych pojęć topologii. Zakładam, że ma standardową wiedzę z algebry liniowej: macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych, przestrzenie liniowe i ich odwzorowania. Zadań jest niewiele, podaję natomiast sporo szczegółowo przeliczonych przykładów i czytelnik może je traktować jak zadania rozwiązane.

Pragnę podziękować przede wszystkim dr Wojciechowi Jurczakowi, Marcinowi Sobocińskiemu i Dorocie Krochmalczyk, lekarzom z Kliniki Hematologii Uniwersytetu Jagiellońskiego. Bez ich aktywnego działania ta książka na pewno nie powstałaby. Miłym obowiązkiem jest wyrażenie wdzięczności za wyjaśnienia i wskazówki matematykom z Uniwersytetu Jagiellońskiego, Zofii Denkowskiej i Adamowi Janikowi oraz Zdzisławowi Pogodzie, który objaśniał mi zawiłości klasyfikacji rozmaitości i podawał materiały o historii geometrii. Andrzejowi Derdzińskiemu z Ohio State University zawdzięczam informacje o przestrzeniach, do których stosuje się twierdzenie Bochnera. Wyrazy podziękowania kieruję do obu recenzentów, których uwagi umożliwiły mi usunięcie szeregu niedostatków tekstu. Na koniec pragnę docenić starania żony, która wielokrotnie wymuszała poprawienie stylu i jasności wykładu.

Uniwersytet Jagielloński
i Centrum Kopernika
Badań Interdyscyplinarnych,
Kraków, styczeń 2010 r.

1. Preliminaria

1.1. Przestrzeń i czasoprzestrzeń w matematyce

Najważniejszą przestrzenią, z jaką wszyscy mamy do czynienia, jest czasoprzestrzeń. Najbardziej elementarnym i niezbędnym składnikiem opisu dowolnego zjawiska fizycznego jest podanie, gdzie i kiedy zaszło. Zbiór wszystkich miejsc i momentów zdarzeń, które traktujemy jako punktowe, czyli nie przypisujemy im rozciągłości przestrzennej ani czasowej, tworzy *czasoprzestrzeń*. Intuicja psychologiczna i tradycja kulturowa odróżniają czas od przestrzeni. Czas to następstwo zdarzeń, natomiast przestrzeń jest zbiorem równoczesnych położeń wszelkich ciał materialnych, przy czym istotne są tylko wzajemne relacje tych położeń, niezależne od fizycznych własności ciał. Dopiero nowożytna fizyka wykazała istnienie głębszego, a nie tylko powierzchownego związku czasu i przestrzeni i pomimo intuicyjnej odrębności złączyła je w jeden obiekt fizyczny. Według teorii względności czas i przestrzeń są jedynie pewnymi aspektami tego obiektu, który matematycznie modelowany jest za pomocą czasoprzestrzeni, a ta jest pewnego rodzaju przestrzenią matematyczną. W tej książce będziemy stosować jednolite podejście do wszystkich przestrzeni i tylko tam, gdzie jest to konieczne, będziemy wskazywać odmienność czasoprzestrzeni od pozostałych przestrzeni używanych w matematyce i innych naukach ścisłych.

Fizyczna przestrzeń, którą postrzegamy zmysłami, stała się prototypem bardzo ogólnego i fundamentalnego dla całej matematyki pojęcia przestrzeni abstrakcyjnej. Najbliższa intuicji jest *przestrzeń euklidesowa* $\mathbf{E}^n$, o której przez długi czas sądzono, że jest jedyną możliwą przestrzenią w geometrii, a w przypadku trzech wymiarów przedstawia przestrzeń fizyczną. Dopiero w XIX wieku pojawiły się przestrzenie nieeuklidesowe. Z algebry znane jest pojęcie przestrzeni liniowej, czyli wektorowej. Jej elementami nie są punkty pojmowane geometrycznie, lecz wektory określone jedynie własnościami algebraicznymi — mogą to zatem być bardzo odmienne obiekty matematyczne. Ten fundamentalny fakt, że z punktu widzenia algebry wektor nie musi być strzałką łączącą dwa punkty w $\mathbf{E}^n$, sprawił, że w analizie matematycznej wprowadzono bardzo ważne pojęcie *przestrzeni funkcyjnej*, której elementami (wektorami) są funkcje o określonych własnościach, np. $L^2(a,b)$ jest przestrzenią liniową funkcji rzeczywistych całkowalnych z kwadratem na odcinku $[a,b]$ osi liczbowej. W ten sposób powstała analiza funkcjonalna, w której bada się abstrakcyjne przestrzenie wektorowe mające nieskończenie wiele wymiarów i niedające się przedstawić graficznie.

Uogólnienie pojęcia przestrzeni poszło nie tylko w kierunku wektorowych przestrzeni funkcyjnych. Drugi kierunek, który nas tu bardziej interesuje, wychodzi ze spostrzeżenia, iż przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią liniową, a powierzchnie w $\mathbf{E}^3$ — takie jak sfera, torus, elipsoida, hiperboloida itp. — przestrzeniami wektorowymi już nie są. (Suma dwóch wektorów na płaszczyźnie jest wektorem leżącym na niej, natomiast nie jest wcale oczywiste, jak zdefiniować wektory leżące na sferze. Gdyby sferę zdefiniować w $\mathbf{E}^3$ jako zbiór wektorów jednakowej długości zaczepionych w jej środku, to suma dwu takich wektorów wyjdzie poza nią). Tradycyjnie do czasów Riemanna powierzchnie i hiperpowierzchnie (czyli powierzchnie o wymiarze wyższym niż 2) pojmowano jako podzbiory przestrzeni euklidesowej $\mathbf{E}^n$. Takie ujęcie zwykle nie jest najwygodniejsze w konkretnych rozważaniach, a nawet okazało się utrudnieniem w badaniach pewnych przestrzeni. Mocnym argumentem przeciwko temu ujęciu jest einsteinowska ogólna teoria względności: według niej fizyczna czasoprzestrzeń może być modelowana jako 4–wymiarowa hiperpowierzchnia w pewnej 10–wymiarowej przestrzeni wektorowej (przestrzeni Minkowskiego), lecz ta zanurzająca ją przestrzeń fizycznie nie istnieje. Czasoprzestrzeń istnieje fizycznie sama w sobie, jako samodzielna przestrzeń geometryczna, nie zaś jako hiperpowierzchnia w przestrzeni o większej liczbie wymiarów. Na potrzeby zarówno fizyki, jak i samej geometrii podano ogólną definicję przestrzeni geometrycznej, która nie jest liniowa i która traktuje wszystkie możliwe (znane i nieznane) hiperpowierzchnie w $\mathbf{E}^n$ jako samodzielne przestrzenie, i ściśle ujmuje to, co intuicyjnie nazywamy powierzchnią zakrzywioną.

Najogólniejszego, dającego fundament dla niemal całej matematyki pojęcia przestrzeni dostarcza topologia. Wprowadza ona *przestrzeń topologiczną*, będącą rodziną (zbiorem) zbiorów otwartych. Wszystkie przestrzenie liniowe w algebrze, funkcyjne w analizie i „geometryczne" w geometrii są przestrzeniami topologicznymi. Ponieważ wybór zbiorów otwartych w danym zbiorze punktów jest w dużej mierze arbitralny, różnice między odmiennymi przestrzeniami topologicznymi mogą być ogromne. Spośród nich wybieramy klasę, dość wąską z punktu widzenia topologii, tych przestrzeni, które lokalnie są homeomorficzne[1] z kawałkami przestrzeni $\mathbf{R}^n$; z punktu widzenia zastosowań w samej matematyce i naukach przyrodniczych klasa ta jest bardzo szeroka. Są to *rozmaitości różniczkowe* (*różniczkowalne*). One właśnie są „przestrzeniami", w których będziemy uprawiać analizę tensorową. Jeden z głównych programów badawczych fizyki dotyczy sformułowania fundamentalnych teorii fizycznych na odpowiednich rozmaitościach różniczkowych. Rozmaitościami są

[1]Homeomorfizm definiujemy w podrozdz. 1.5.

też przestrzenie pojawiające się w innych naukach ścisłych i technicznych. Tu podamy uproszczoną definicję rozmaitości, nieodwołującą się bezpośrednio do topologii.

1.2. Wektory na rozmaitości

Pierwszym krokiem jest przeniesienie znanej nam analizy wektorowej w liniowej przestrzeni $\mathbf{R}^n$ na dowolną rozmaitość, która jest „zakrzywiona”, tj. nieliniowa. Pojęcie wektora pochodzi z geometrii analitycznej, a jego prototypem jest odcinek skierowany $\overrightarrow{PQ}$ w $\mathbf{E}^n$ łączący punkt początkowy (zaczepienia) P z punktem końcowym Q. Mamy dwa rodzaje wektorów: wektory zaczepione w punkcie początkowym oraz wektory swobodne — reprezentowane przez całą klasę równoważności $[\overrightarrow{PQ}]$ odcinków skierowanych. W obu wypadkach wektor jest wyznaczony przez *parę* (lub nieskończony zbiór par) punktów w $\mathbf{E}^n$. To określenie wektora jest niewystarczające dla większości problemów geometrii, nauk ścisłych i techniki. Wektor prędkości $\mathbf{v}$ planety (traktowanej jako punkt materialny) jest zaczepiony w punkcie P orbity, w którym w danej chwili planeta się znajduje, a punkt końcowy Q jest nieokreślony i fizycznie nie ma sensu. To, że wektor $\mathbf{v}$ nie jest odcinkiem skierowanym, widać z faktu, że nie zgadzają się wymiary[2]. Współrzędne (kartezjańskie) mają wymiar długości i ten sam wymiar ma odcinek skierowany, a więc różny od wymiaru prędkości. Wektor prędkości (i każdej innej wielkości fizycznej) jest jedynie proporcjonalny do pewnego odcinka skierowanego, a współczynnik proporcjonalności jest wielkością wymiarową i ma dowolną wartość. Rzeczywiście, z definicji prędkości piszemy $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{x}/\Delta t$, gdzie $\Delta\mathbf{x}$ jest odcinkiem skierowanym od położenia planety w chwili t do położenia w chwili $t + \Delta t$, ale ponieważ (infinitezymalny) interwał Δt jest dowolny, ten sam zatem wektor $\mathbf{v}$ dostajemy, biorąc wielkości $a\Delta\mathbf{x}$ i $a\Delta t$, gdzie $a \neq 0$ jest dowolną liczbą. Ta niezgodność wymiarów sygnalizuje, że na ogół wektor nie leży w tej przestrzeni, w której jest zaczepiony. Zauważmy natomiast, że wektor prędkości jest zdefiniowany jako wektor styczny do krzywej (trajektorii planety). Jest to własność ogólna: wektory będziemy definiować jako obiekty styczne do krzywych na rozmaitości, czyli określone przez kierunek prostej stycznej. Tym samym dany wektor jest związany z jednym punktem przestrzeni — wybranym punktem styczności.

W przestrzeni zakrzywionej, np. na sferze, wektor w ogóle nie może być odcinkiem prostej złożonej z punktów tej przestrzeni, gdyż nie ma tam linii prostych i strzałka by się wygięła. Wynika stąd, że wektor na sferze — nazywa-

[2]Terminem „wymiar” określamy dwa odrębne pojęcia. W matematyce wymiar (lub liczba wymiarów) to liczba współrzędnych niezbędnych do jednoznacznego zdefiniowania punktu w przestrzeni, wymiar przestrzeni $\mathbf{R}^n$ jest zatem równy n. W naukach ścisłych wymiar (lub miano) wielkości fizycznej to wyrażenie jej w postaci iloczynu potęg jednostek wielkości podstawowych, czyli długości L, czasu T i masy M; prędkość ma wymiar L/T.

my go *wektorem stycznym* (w danym punkcie) do sfery — *nie* należy do niej, lecz do innej przestrzeni, zwanej *przestrzenią styczną* (w tym punkcie) do sfery. Przestrzeń styczna jest zbiorem wektorów stycznych w jednym punkcie do sfery, jest więc przestrzenią liniową, gdyż wektory zaczepione w tym samym punkcie można dodawać. Jak zobaczymy dalej, przestrzeń styczną przedstawiamy graficznie jako płaszczyznę styczną w danym punkcie do sfery. Przedstawienie to nie jest matematycznie w pełni ścisłe, bowiem przestrzeń styczna jest tylko przestrzenią wektorową (w przypadku sfery dwuwymiarową), natomiast płaszczyzna styczna jest (jak każda przestrzeń $\mathbf{E}^n$) euklidesową przestrzenią afiniczną. Co więcej, płaszczyzny styczne do sfery na ogół się przecinają, a wektorowe przestrzenie styczne z definicji nie mogą się przecinać, ponieważ równość dwu wektorów zaczepionych w różnych punktach nie jest określona.

W przypadku rozmaitości będących przestrzeniami liniowymi ($\mathbf{E}^n$, przestrzeń Minkowskiego[3] szczególnej teorii względności itp.) przestrzeń styczna nakłada się na rozmaitość i stąd bierze się przekonanie — ukształtowane w przestrzeni fizycznej utożsamianej niegdyś z $\mathbf{E}^3$ — że wektory leżą na samej rozmaitości.

Kluczowe jest pojęcie wektora w jednym punkcie rozmaitości. W następnym kroku wprowadza się gładkie pola wektorowe, tj. z każdym punktem rozmaitości (lub pewnego jej obszaru) stowarzysza się jeden wektor w taki sposób, by wektory te zmieniały się gładko przy przejściu do sąsiednich punktów. Przykładów pól jest mnóstwo: natężenie jednorodnego pola grawitacyjnego przy powierzchni Ziemi, zmienne w przestrzeni (i wolno w czasie) natężenie pola grawitacyjnego w obszarze Układu Słonecznego, rozmaite pola elektryczne i magnetyczne, pole prędkości wody w bystrym strumieniu górskim, pole prędkości planety wzdłuż jej trajektorii. W $\mathbf{R}^n$ obliczanie pochodnych pola wektorowego przebiega podobnie jak funkcji rzeczywistych: różniczkuje się oddzielnie każdą składową wektora. Na rozmaitości, która nie jest przestrzenią liniową, tak postępować nie można — okazało się, że podanie zadowalającej definicji pochodnej pola wektorowego było największą trudnością analizy tensorowej i zajęło wiele lat. Pojawia się tu nowa wielkość: koneksja afiniczna. Jej własności stanowią treść rozdziału 5.

1.3. Tensory

Linie, powierzchnie, figury płaskie i bryły rozmaitych wymiarów oraz pola wektorowe nie wyczerpują wszystkich obiektów geometrycznych, jakie można i trzeba skonstruować w przestrzeniach euklidesowych i ogólniejszych. Pola elektryczne i magnetyczne są częściami jednego obiektu fizycznego — pola elektromagnetycznego — które powinno być opisane jednym tworem matema-

[3]Terminy „przestrzeń Minkowskiego” i „czasoprzestrzeń Minkowskiego” są synonimami. Ten drugi jest używany częściej w literaturze fizycznej.

tycznym. Jednak jedno pole wektorowe nie wystarczy i musimy wprowadzić twór ogólniejszy, antysymetryczny tensor natężenia pola elektromagnetycznego określony w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Ten i wiele innych ważnych w zastosowaniach tensorów można przedstawić jako macierze kwadratowe o wymiarze równym wymiarowi przestrzeni, w której są określone. Za pomocą takich tensorów (ściślej — pól tensorowych) opisujemy naprężenia w skorupie ziemskiej (zmienne w momencie trzęsienia ziemi), rozmieszczenie gęstości energii, pędu i ciśnienia w płynącej cieczy (huragan lub fale morskie) oraz własności optyczne kryształów. W samej geometrii określenie iloczynu skalarnego wektorów i odległości punktów bliskich wymaga wprowadzenia symetrycznego tensora metrycznego, który tym samym staje się fundamentalnym obiektem geometrycznym dla danej rozmaitości. Są też tensory bardziej złożone, najważniejszym z nich jest tensor krzywizny dla rozmaitości z koneksją afiniczną.

Tradycyjne podejście do tensorów opierało się na pojęciu *obiektu geometrycznego*, któremu nie nadawano precyzyjnej treści w postaci aksjomatycznej definicji, lecz jedynie podawano jego własności transformacyjne przy zmianie układu współrzędnych. Podejście to okazało się niezadowalające i obecnie tensory definiuje się jako odwzorowania wieloliniowe. W tej książce będziemy od czasu do czasu posługiwać się pojęciem obiektu, nadając mu czysto intuicyjny sens: jest to twór matematyczny, który ma treść geometryczną, a więc nie jest całkowicie zależny od wyboru układu współrzędnych. Do obiektów geometrycznych zaliczamy wszelkie figury geometryczne (to, czy punkty przestrzeni są obiektami, jest kwestią konwencji), funkcje, odcinki skierowane, wektory, formy liniowe (odwzorowania wektorów w liczby), jak również metodę przesuwania równoległego wektora z jednego miejsca w inne oraz tensory. Tensory są takim uogólnieniem wektorów i funkcji rzeczywistych, że różniczkowanie pól tensorowych jest jednoznacznie określone przez różniczkowanie wektorów.

Przez rachunek tensorowy rozumiemy zatem analizę tensorową na dowolnej rozmaitości różniczkowej. Najpierw trzeba zdefiniować rozmaitość. Robimy to za pomocą przestrzeni $\mathbf{R}^n$. Zaczynamy od przypomnienia potrzebnych tu wiadomości z analizy.

1.4. Przestrzenie R^n i E^n

W analizie matematycznej występuje kilka różnych przestrzeni $\mathbf{R}^n$ powstających przez nakładanie dodatkowych struktur na przestrzenie o mniejszej liczbie własności.

• *Arytmetyczna przestrzeń* $\mathbf{R}^n$. Jest to zbiór arytmetycznych ciągów n liczb rzeczywistych, $\mathbf{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) : x^i \in \mathbf{R}\}$, bez żadnej dodatkowej struktury. Ciągi te nazywamy punktami, a liczby x^i, $i = 1, \dots, n$, są *współrzędnymi* punktu $x = (x^i) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$. Zbiór $\mathbf{R}^n$ ma strukturę iloczynu kartezjańskiego n egzemplarzy zbioru liczb rzeczywistych, $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ldots \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R}^1 \equiv \mathbf{R}$.

• *Wektorowa przestrzeń* $\mathbf{R}^n$. W $\mathbf{R}^n$ wyróżniony jest punkt $0 = (0, \ldots, 0)$, naturalne jest więc nałożyć na nią strukturę przestrzeni liniowej[4]: punkty traktujemy jak wektory. Wektorowa przestrzeń $\mathbf{R}^n$ to n–wymiarowa rzeczywista przestrzeń liniowa, której elementami są ciągi $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Operacja liniowa $ax + by$, dla $a, b \in \mathbf{R}$, daje wektor będący ciągiem $(ax^i + by^i)$. Współrzędne x^i punktu stają się teraz *składowymi* wektora. Wektor jest tożsamy z ciągiem swoich składowych. Aby mieć zgodność z zapisem macierzowym, przyjmujemy regułę, że składowe wektora, zarówno w $\mathbf{R}^n$, jak i na dowolnej rozmaitości, tworzą *macierz jednokolumnową*. W tej przestrzeni wprowadzamy *bazę naturalną* złożoną z n wyróżnionych, liniowo niezależnych wektorów[5] $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)^T$. W bazie $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, dowolny wektor x jest kombinacją liniową $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$. Wynika stąd fundamentalne

TWIERDZENIE 1.1. Każda rzeczywista n–wymiarowa przestrzeń liniowa V^n jest izomorficzna z wektorową przestrzenią $\mathbf{R}^n$. Izomorfizm oznacza tu wzajemnie jednoznaczne i zachowujące operacje algebraiczne odwzorowanie liniowe V^n na $\mathbf{R}^n$. ■

Rzeczywiście, niech $\{E_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, będzie pewną bazą wektorową w V^n, czyli każdy wektor $v \in V^n$ ma w tej bazie reprezentację $v = \sum_{i=1}^n x^i E_i$. Wprowadzamy odwzorowanie liniowe $f : V^n \to \mathbf{R}^n$ zdefiniowane jego działaniem na wektory bazowe[6], $f(E_i) := e_i$. Wówczas

$$f(v) = \sum_{i=1}^n x^i f(E_i) = \sum_{i=1}^n x^i e_i = x$$

i mamy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie $v \leftrightarrow x$ będące liniowym izomorfizmem obu przestrzeni.

• *Topologiczna przestrzeń wektorowa* $\mathbf{R}^n$. W liniowej przestrzeni $\mathbf{R}^n$ można wprowadzić *topologię*, czyli zdefiniować rodzinę *zbiorów otwartych*, które łącznie pokrywają całą przestrzeń. Można to zrobić na wiele nierównoważnych sposobów. W praktyce zawsze wprowadza się *topologię naturalną*, w której pierwotnymi zbiorami otwartymi są *kule otwarte* o środku w dowolnym punkcie $x_0 = (x_0^i)$ i o dowolnym promieniu $r > 0$:

$$K(x_0, r) := \Big\{x : \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i)^2 < r^2\Big\};$$

kule te nie zawierają brzegowej sfery. Dowolny zbiór otwarty jest sumą mnogo-

[4] Terminy „przestrzeń liniowa” i „przestrzeń wektorowa” traktujemy jak ścisłe synonimy.

[5] Ze względów typograficznych będziemy czasem pisać wektory jako transponowane macierze jednowierszowe; górny indeks T oznacza transpozycję macierzy.

[6] Notacja: symbol „:=” oznacza definicję, czyli wielkość stojąca po lewej stronie jest definiowana wyrażeniem po prawej stronie tego symbolu.

ściową skończonej, przeliczalnej lub nieprzeliczalnej ilości kul otwartych. Wynika stąd, że jeżeli punkt x należy do zbioru otwartego, to zawiera się w nim wraz z otaczającą go kulą otwartą o dostatecznie małym promieniu. Nazwanie tej topologii „naturalną" nabiera sensu, gdy w liniowej przestrzeni $\mathbf{R}^n$ wprowadzi się iloczyn skalarny i w konsekwencji normę wektora. (Pojęcia te są historycznie wcześniejsze i bardziej intuicyjne od abstrakcyjnego zbioru otwartego).

• *Wektorowa przestrzeń euklidesowa* $\mathbf{R}^n$. Jest to topologiczna przestrzeń wektorowa $\mathbf{R}^n$, w której wprowadzamy *euklidesowy iloczyn skalarny*, czyli odwzorowanie pary wektorów na liczbę rzeczywistą, dany wzorem

$$\langle x, y\rangle \equiv x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n.$$

Iloczyn ten ma własności:

— $x \cdot y \; = y \cdot x$,
— jest liniowy w każdym argumencie,
— $x \cdot x \geqslant 0$ oraz $x \cdot x = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0 = (0, \ldots, 0)$. (E)

Iloczyn skalarny określa *normę* (*długość*) wektora[7]

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$$

oraz odległość punktów x i y:

$$d(x, y) \equiv \|x - y\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}\ .$$

Dla dowolnych wektorów w $\mathbf{R}^n$ zachodzi *nierówność Cauchy'ego–Schwarza*

$$(x \cdot y)^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2,$$

a z niej wynika nierówność będąca szczególnym przypadkiem *nierówności Minkowskiego*:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Aby udowodnić pierwszą nierówność, bierzemy dwa dowolne wektory x i y oraz dowolną liczbę $\lambda \in \mathbf{R}$. Wówczas zachodzi

$$(x + \lambda y) \cdot (x + \lambda y) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2x \cdot y\lambda + \|x\|^2.$$

[7] Zależnie od wygody wektory tej przestrzeni będziemy oznaczać x, a ich długość $\|x\|$ albo pismem pogrubionym $\mathbf{x}$ i ich długość $|\mathbf{x}|$.