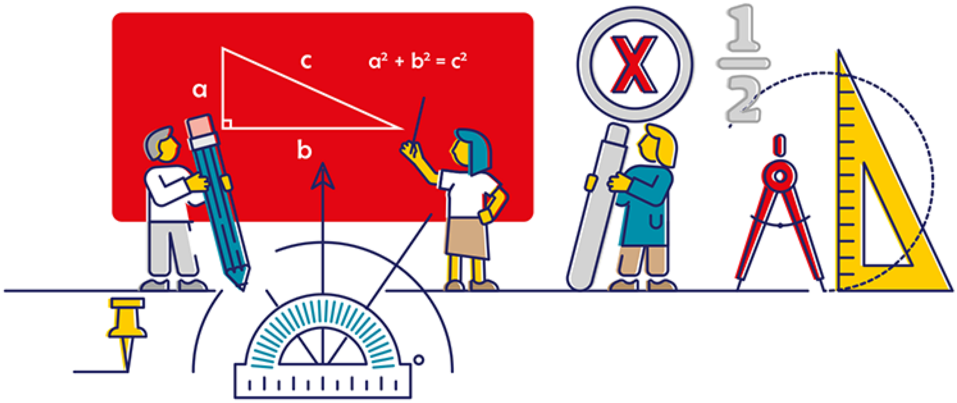
DOMOWE LEKCJE MATEMATYKI

KLASY 7 i 8



Danuta Zaremba

Helion

Helion EDUKACJA

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Skład komputerowy w systemie LaTeX wykonała autorka.

Grafika na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.com

Helion S.A.
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *https://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
https://helion.pl/user/opinie/dolm78
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-283-9388-2

Printed in Poland.

Spis treści

6. Twierdzenie Pitagorasa

Rozdział jest przeznaczony dla klasy siódmej. Jest w nim mowa o ważnym związku między bokami trójkąta prostokątnego sformułowanym w twierdzeniu Pitagorasa. Pokazane są rachunkowe zastosowania twierdzenia Pitagorasa, w tym zastosowania praktyczne. W obliczeniach długości boków trójkąta prostokątnego pojawia się pierwiastek kwadratowy i jest to wstępne zetknięcie się ucznia z tym pojęciem. Pierwiastkom jest poświęcony cały rozdział 2, przeznaczony dla klasy ósmej.

W tym rozdziale, jak i we wszystkich rozdziałach dotyczących geometrii, długość odcinków podajemy na ogół w nieokreślonych jednostkach. W rozważaniach teoretycznych nie jest ważne, jakie to są jednostki. Jeśli mówimy o trójkącie o bokach 3, 4 i 6, to nie wiadomo, jak duże są to boki. Wiadomo tylko, że zostały zmierzone tą samą jednostką, a jej wielkość jest nieistotna dla dalszych rozważań.

Lekcja 1. Twierdzenie Pitagorasa

Wprowadzimy twierdzenie Pitagorasa w sposób czynnościowy, który pozwala od razu widzieć jego zastosowania i uczy obliczania jednego z boków trójkąta prostokątnego, jeśli dane są dwa pozostałe. A przecież o to chodzi. Interpretacja geometryczna twierdzenia jest wprawdzie bardzo piękna, ale oddala ucznia od zastosowań rachunkowych. Moim zdaniem warto ją zostawić na później (lekcja 3).

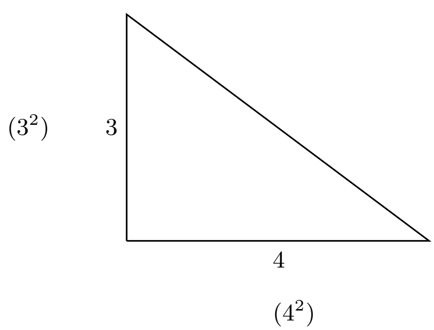
Zacznijmy od przypomnienia, co to jest trójkąt prostokątny, i poinformujmy uczniów, że na tej lekcji poznają związek między długościami boków w trójkątach prostokątnych.

W pierwszym ćwiczeniu uczeń będzie mierzyć długość wybraną przez siebie jednostką. Niech w tym celu przygotuje cyrkiel i ustali dowolnie jego rozwartość — to właśnie będzie jednostka.

Ćwiczenie 1. Narysuj w zeszycie kąt prosty. Na jednym ramieniu odłóż 3 wybrane przez siebie jednostki, a na drugim 4 jednostki. Połącz końce otrzymanych odcinków. W ten sposób otrzymasz trójkąt prostokątny, którego dwa boki mają długość 3 i 4. Zmierz tą samą jednostką trzeci bok trójkąta.

W trakcie tego ćwiczenia powiedzmy, że znamy jego rezultat: trzeci bok trójkąta ma długość 5. Zapewne uczniowie będą ciekawi, skąd my to wiemy — podajmy więc sposób obliczania.

Długość każdego z dwóch boków leżących przy kącie prostym podnosimy do kwadratu:

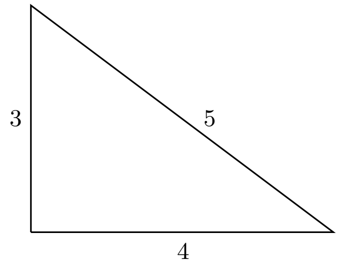


i wyniki dodajemy:

$$3^2 + 4^2 = 25.$$

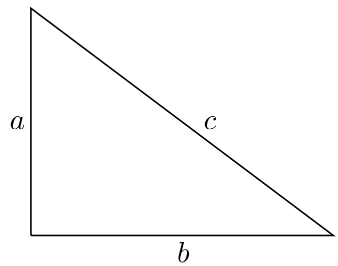
Szukamy teraz takiej liczby, która po podniesieniu do kwadratu daje 25. I to jest właśnie długość trzeciego boku.

Zapiszmy związek między bokami rozważanego trójkąta



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

i poinformujmy uczniów, że analogiczny związek zachodzi w każdym trójkącie prostokątnym:



$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Poinformujmy też, że ten związek między bokami trójkąta prostokątnego został odkryty w starożytności i nosi nazwę twierdzenia Pitagorasa[7].

Niech uczniowie spróbują sformułować twierdzenie Pitagorasa w sposób czynnościowy, przy czym zamiast „długość boku” pozwólmy mówić po prostu „bok”. Takie skróty nie doprowadzą do nieporozumień, a uproszczą język:

Jeżeli każdy z dwóch boków leżących przy kącie prostym podniesiemy do kwadratu i wyniki dodamy, otrzymamy tę samą liczbę, co po podniesieniu do kwadratu boku leżącego naprzeciw kąta prostego.

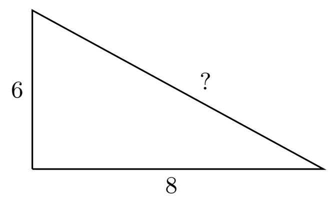
Zapytajmy o długości boków trójkąta prostokątnego — który bok jest najdłuższy? Można to uwzględnić w sformułowaniu twierdzenia Pitagorasa: zamiast mówić o położeniach boków względem kąta prostego, można mówić o bokach krótszych i boku najdłuższym.

Oczywiście jeśli uczniowie znają już nazwy „przyprostokątna” i „przeciwprostokątna”, to niech ich używają. Jeśli nie, wprowadźmy je na następnej

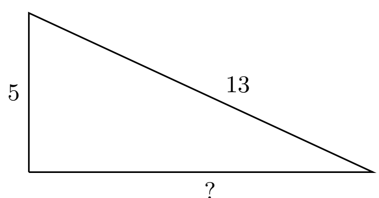
[7] Uczeń może poczytać o Pitagorasie na przykład w Wikipedii.

lekcji, aby teraz nie dekoncentrować uczniów — niech skupią się na istocie poznanego twierdzenia. Nie szkodzi, że na razie sformułowanie twierdzenia jest dłuższe; ważne, aby uczeń je rozumiał. Na szlifowanie języka i upraszczanie sformułowania przyjdzie czas, a teraz warto poćwiczyć stosowanie poznanego twierdzenia. Aby było łatwiej, nie wprowadzajmy niewiadomych, nie twórzmy równań — wykonujmy obliczenia. W początkowych przykładach długości boków rozważanych trójkątów będą liczbami całkowitymi. Chodzi o to, aby ewentualne problemy rachunkowe nie przesłaniały uczniom schematu obliczania i aby mogli ten schemat skutecznie przyswoić. Oczywiście po jakimś czasie w przykładach pojawią się trójkąty, w których nie wszystkie boki mają długości wyrażające się liczbami naturalnymi. Będzie to okazja do wprowadzenia pojęcia pierwiastka arytmetycznego.

Ćwiczenie 2. Oblicz podanym sposobem nieznany bok trójkąta:



Ćwiczenie 3. Oblicz nieznany bok trójkąta:



W ćwiczeniu 3 może się zdarzyć, że uczeń automatycznie powtórzy poprzedni schemat, sumując kwadraty podanych boków. Trzeba, aby zauważył, że tym razem nie chodzi o obliczenie boku najdłuższego. Zatem tym razem się nie dodaje, lecz odejmuje: $13^2 - 5^2$.

Zadania

1. Czy trójkąt, w którym dwa kąty są równe:

   a) $46°$ i $45°$, b) $55°$ i $34°$, c) $51°$ i $39°$,
   jest prostokątny?

2. Dwa krótsze boki trójkąta prostokątnego są równe 9 i 12. Oblicz trzeci bok tego trójkąta.

3. Najdłuższy bok trójkąta prostokątnego jest równy 25, a jeden z jego krótszych boków ma długość 24. Oblicz trzeci bok trójkąta.

Lekcja 2. Twierdzenie Pitagorasa — ciąg dalszy

Wprowadzimy nazwy boków trójkąta prostokątnego, uprościmy sformułowanie twierdzenia Pitagorasa i poćwiczymy jego stosowanie. Trójkąty będziemy dobierać tak, aby ich boki miały długości wyrażające się liczbami całkowitymi.

Zacznijmy od informacji, że boki trójkąta prostokątnego mają specjalne nazwy: boki leżące przy kącie prostym nazywamy przyprostokątnymi, a bok leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy przeciwprostokątną. Zacznijmy używać tych nazw, z tym że dopuśćmy je także w sensie długości boków. Zamiast więc mówić: długość przeciwprostokątnej jest równa 5, powiemy krótko: przeciwprostokątna jest równa 5. Taka umowa nie prowadzi do nieporozumień, a pozwala na uproszczenie języka.

Ćwiczenie 1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są równe 12 i 16. Oblicz przeciwprostokątną tego trójkąta.

Ćwiczenie 2. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest równa 15, a jedna z jego przyprostokątnych jest równa 12. Oblicz drugą przyprostokątną.

Niech uczeń poda związek między bokami trójkąta prostokątnego, posługując się nazwami jego boków:

jedna przyprostokątna do kwadratu + druga przyprostokątna do kwadratu = przeciwprostokątna podniesiona do kwadratu.

Związek ten można skrócić, jeżeli wynik podnoszenia liczby do kwadratu nazwać kwadratem tej liczby, a dodawanie sumą:

suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.

Takie zgrabne sformułowanie jest jednak trudne dla wielu uczniów i trzeba czasu, aby do niego dojrzeli. Miejmy to na uwadze. Najważniejsze jest, aby nasi podopieczni rozumieli związek między bokami trójkąta prostokątnego i umieli stosować go w obliczeniach.

Na zakończenie lekcji proponuję ćwiczenie, w którym trzeba skorzystać z twierdzenia Pitagorasa i rozumować nie wprost: gdyby trójkąt był prostokątny, jego boki spełniałyby związek wynikający z twierdzenia Pitagorasa, a tak nie jest.

Ćwiczenie 3. Czy trójkąt o bokach 6, 7 i 9 jest prostokątny?
$\langle$Gdyby był, to $6^2 + \ldots\rangle$

Zadania

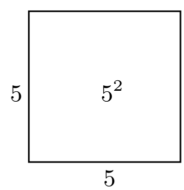
1. Oblicz przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnych 10 i 24.
2. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi 41, a jedna z przyprostokątnych 40. Oblicz drugą przyprostokątną.
3. Czy trójkąt o bokach 5, 10 i 11 jest prostokątny?

Lekcja 3. Geometryczna interpretacja twierdzenia Pitagorasa

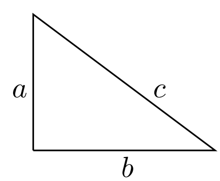
Pokażemy geometryczną interpretację związku między bokami trójkąta prostokątnego, znaną od czasów starożytnych. Jest ona wykorzystywana w dowodach twierdzenia Pitagorasa, natomiast nie jest potrzebna w obliczeniach boków trójkąta.

Postawmy pytanie, jak mając dany odcinek o długości 5, przedstawić geometrycznie liczbę 5^2.

Można oczywiście narysować odcinek 5 razy dłuższy. Będzie on miał długość 25. Jednak nie o to nam chodzi, bo chcemy liczbę 5^2 utożsamić z polem kwadratu o boku 5. Byłoby świetnie, gdyby uczniowie sami podali taką interpretację kwadratu liczby. Spróbujmy im w tym pomóc, pytając o związek drugiej potęgi z kwadratem w sensie figury geometrycznej:



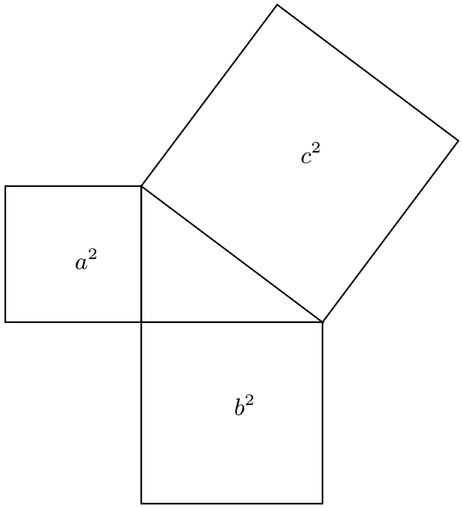
Następnie wróćmy do twierdzenia Pitagorasa:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

i liczby a^2, b^2, c^2 przedstawmy jako pola odpowiednich kwadratów, dorysowując te kwadraty do boków trójkąta.

Z otrzymanego rysunku



odczytamy, że

pole kwadratu zbudowanego na jednej przyprostokątnej plus pole kwadratu zbudowanego na drugiej przyprostokątnej jest równe polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Pomóżmy to sformułować krócej:

suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Zdajmy sobie sprawę, że taka własność jest dla ucznia jakby czymś innym niż związek między bokami trójkąta. A właśnie ten związek trzeba widzieć, aby z sukcesem rozwiązywać zadania. Interpretacja geometryczna jest natomiast potrzebna do dowodu twierdzenia. Ucznia zainteresowanego matematyką można zachęcić do poszukania dowodów twierdzenia Pitagorasa w internecie — jest ich tam bardzo dużo.

Na zakończenie lekcji możemy poćwiczyć stosowanie interpretacji geometrycznej twierdzenia Pitagorasa.

Ćwiczenie 1. Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego wynosi 15, a pole kwadratu zbudowanego na jednej z jego przyprostokątnych 9. Jakie jest pole kwadratu zbudowanego na drugiej przyprostokątnej?

Ćwiczenie 2. Pola kwadratów zbudowanych na trzech bokach pewnego trójkąta wynoszą 4, 7 i 9. Czy ten trójkąt jest prostokątny?
⟨Gdyby był, to ...⟩

Zadania

1. Pola kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych pewnego trójkąta prostokątnego wynoszą 9 i 10. Ile wynosi pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej?

2. Pola kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynoszą 36 i 64. Oblicz przeciwprostokątną tego trójkąta.

3. Pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego wynosi 6,25, a pole kwadratu zbudowanego na jednej z jego przyprostokątnych jest równe 2,25. Oblicz drugą przyprostokątną tego trójkąta.

4. Pola kwadratów zbudowanych na bokach pewnego trójkąta są równe 13, 15 i 28,1. Czy trójkąt ten jest prostokątny?

Lekcja 4. Pierwiastek kwadratowy

Do tej pory rozważaliśmy trójkąty prostokątne, których boki miały długość wyrażającą się liczbami całkowitymi. Teraz pozbędziemy się tego ograniczenia i potraktujemy twierdzenie Pitagorasa jako okazję do wprowadzenia pojęcia pierwiastka kwadratowego, który pojawia się tu w sposób naturalny.

Zacznijmy od zadania.

- Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości 3 i 5.

Znając twierdzenie Pitagorasa, uczeń podniesie każdą z tych liczb do kwadratu i doda:

$$3^2 = 9, \quad 5^2 = 25, \quad 9 + 25 = 34.$$

Teraz trzeba znaleźć taką liczbę, która po podniesieniu do kwadratu daje 34. Ponieważ nie jest to liczba całkowita, więc może ułamek zawarty między 5 i 6? Niech uczeń weźmie kalkulator do ręki i spróbuje poszukać tej liczby metodą prób i błędów:

$$5 \text{ — za mało},\ \ 6 \text{ — za dużo},\ \ \text{więc może } 5{,}5?$$

$$(5{,}5)^2 = 30{,}25,\ \ \text{więc może } 5{,}8 \ \text{ lub } \ 5{,}9?$$

$$5{,}8 \text{ — za mało},\ \ 5{,}9 \text{ — za dużo},\ \ \text{więc może } 5{,}85?$$

Po kilku krokach przerwijmy te obliczenia i poinformujmy uczniów, że nie doprowadzą one do celu. Nie ma bowiem takiego ułamka dziesiętnego, który po podniesieniu do kwadratu daje dokładnie 34. Za każdym razem dostajemy tylko przybliżoną wartość tej liczby. Przybliżamy ją tym bardziej, im więcej cyfr znajdujemy. Dopisywanie cyfr po przecinku nigdy się nie skończy.

Poinformujmy, że liczbę tę nazywamy pierwiastkiem kwadratowym z liczby 34 i oznaczamy symbolem $\sqrt{34}$. Zatem $(\sqrt{34})^2 = 34$.

Powiedzmy też, że symbolu $\sqrt{}$ używa się w odniesieniu do różnych liczb. Niech uczeń poszuka tego symbolu na kalkulatorze. Kalkulator podaje wartości pierwiastków w przybliżeniu.

Sprawdźmy, czy uczeń rozumie, że pierwiastek jest taką liczbą, która po podniesieniu do kwadratu daje liczbę występującą pod pierwiastkiem:

$$(\sqrt{8})^2 = ? \qquad (\sqrt{197})^2 = ?$$

Ćwiczenie 1. Podaj przykład liczby, której pierwiastek kwadratowy jest liczbą zawartą między 11 i 12.
⟨Zacznij od obliczenia 11^2 oraz 12^2.⟩

Trzeba także podać przykłady pierwiastków, które są liczbami naturalnymi. Zapytajmy, ile wynosi

$$\sqrt{25}, \quad \sqrt{9}, \quad \sqrt{16}, \quad \sqrt{100}.$$

Ćwiczenie 2. Podaj jeszcze trzy przykłady liczb, których pierwiastki są liczbami naturalnymi.

W dwóch kolejnych ćwiczeniach uczniom może wydać się dziwne, że zadanie jest skończone w momencie napisania odpowiedniego pierwiastka. Muszą przywyknąć do tego, że to wystarczy. W młodszych klasach każde rozwiązanie zadania rachunkowego było liczbą całkowitą lub ułamkiem, a tutaj tak nie jest.

Ćwiczenie 3. Oblicz przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnych 2 i 5.

Ćwiczenie 4. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi 6, a jedna z przyprostokątnych 5. Oblicz drugą przyprostokątną.

W czasie lekcji warto podać informację, że trójkąty prostokątne, których boki są liczbami naturalnymi, nazywają się trójkątami pitagorejskimi.

Zadania

1. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są równe 1 i 2. Oblicz przeciwprostokątną tego trójkąta.

2. Czy przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 i 4 jest większa niż 5? Odpowiedź uzasadnij.

3. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest równa 8, a jedna z przyprostokątnych jest równa 7. Oblicz drugą przyprostokątną.

Lekcja 5. Zastosowania twierdzenia Pitagorasa

Pokażemy zastosowania twierdzenia Pitagorasa do obliczania różnych długości, w tym zastosowania praktyczne. Podamy też sposób na utworzenie kąta prostego z odcinków o odpowiednio dobranych długościach.

Na początek pokażemy zastosowania twierdzenia Pitagorasa związane z prostokątem. Nie powinny one sprawić uczniom kłopotu, bo zapewne od razu zauważą odpowiedni trójkąt prostokątny, jeśli tylko posłużą się rysunkiem.

W ćwiczeniach 1 i 2 (i nie tylko tam) jest oczywiste, że termin „przekątna" jest użyty w znaczeniu długości odcinka łączącego dwa przeciwległe wierzchołki prostokąta. Ogólnie przekątna może być zarówno odpowiednim odcinkiem, jak i jego długością; znaczenie wynika z kontekstu.

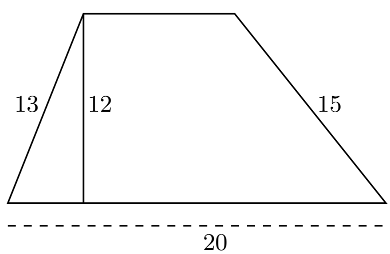
Ćwiczenie 1. Oblicz przekątną prostokąta o bokach 2 i 3.

Ćwiczenie 2. Oblicz przekątną kwadratu o boku 1.

Rozwiążmy teraz zadanie wymagające nieco więcej zachodu, aby znaleźć trójkąt prostokątny, którego boki wiążą się z wymienionymi długościami.

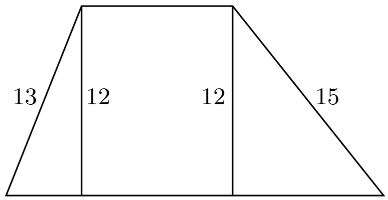
- Wysokość trapezu jest równa 12, a jego dłuższa podstawa jest równa 20. Boki nierównoległe mają długości 13 oraz 15 i tworzą z dłuższą podstawą kąty ostre. Oblicz krótszą podstawę trapezu.

Przedstawmy sytuację na rysunku:



Jeden trójkąt prostokątny już widzimy. Zapytajmy, gdzie dorysować drugi, aby uwidocznić różnicę między dłuższą i krótszą podstawą trapezu.

Uczeń zapewne nie będzie miał problemu z odpowiedzią na to pytanie:



Z rysunku widać, że aby otrzymać krótszą podstawę, wystarczy od dłuższej podstawy odjąć przyprostokątne obu trójkątów. Niech uczeń je obliczy:

$$13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25, \qquad \sqrt{25} = 5,$$

$$15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81, \qquad \sqrt{81} = 9,$$

a potem odejmie:

$$20 - 5 - 9 = 6.$$

W drugiej części lekcji pokażmy dwa przykłady zastosowania twierdzenia Pitagorasa w życiu codziennym.

- Na jaką wysokość sięgnie drabina, która ma długość 2,5 m i jest oddalona od ściany o 50 cm?

Interpretacja geometryczna treści zadania jest jasna, jeśli wyobrazić sobie opisaną drabinę. Drobny kłopot może sprawić uczniom ujednolicenie jednostek — metr czy centymetr? Warto zdecydować się na tę jednostkę, w której liczby będą mniejsze — wybierzmy więc metr. Ułamki dziesiętne lepiej zamienić na zwykłe, bo wtedy obliczenia są łatwiejsze. Ogólnie jest tak, że w życiu codziennym używamy ułamków dziesiętnych, natomiast w matematyce ułamków zwykłych.

Wróćmy do zadania: mamy trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej $2\frac{1}{2}$ (m) i jednej przyprostokątnej $\frac{1}{2}$ (m), a trzeba znaleźć drugą przyprostokątną. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{24}{4} = 6, \qquad \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

Jak widać, drabina sięgnie na wysokość ok. 2,45 m.

- Jak wyznaczyć kąt prosty, mierząc długość?

Zauważmy, że każde trzy liczby a, b, c spełniające warunek $a^2 + b^2 = c^2$ są bokami trójkąta prostokątnego — jest to trójkąt o przyprostokątnych a, b i żaden inny, ponieważ trzy boki wyznaczają trójkąt jednoznacznie. Stąd wniosek, że jeśli z trzech odcinków o długościach 3, 4 i 5 utworzymy trójkąt, to będzie w nim kąt prosty. W praktyce mogą to być odcinki 30 cm, 40 cm i 50 cm, a także trójkę 3, 4 i 5 można zastąpić dowolną trójką pitagorejską. Opisaną procedurę stosuje się w budownictwie, o czym można przeczytać w internecie.

Zadania

1. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku 6.
2. Oblicz przekątną prostokąta o bokach 2 i 3. Wskaż dwie kolejne liczby całkowite, między którymi jest ona zawarta.
3. Oblicz przekątną kwadratu o boku 5. Czy jest ona większa niż 7,1? Odpowiedź uzasadnij.
4. Jeden bok prostokąta wynosi 1, a przekątna 4. Oblicz drugi bok prostokąta i podaj wartość pierwiastka z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.
5. Czy kwadratowy blat stołu o boku 2,15 m można przenieść przez drzwi o wymiarach 2 m na 1 m?
   ⟨Jaki wymiar drzwi jest tu istotny?⟩
6. Harcerze wyszli z obozu i pomaszerowali 5 km na północ, a potem 6 km na zachód. Na jaką odległość oddalili się od obozu?

Lekcja 6. Zastosowania twierdzenia Pitagorasa — ciąg dalszy

Pokażemy przykłady obliczeń boków trójkąta prostokątnego, w których pojawia się okazja do wyłączania czynnika przed pierwiastek.

W zadaniach na zastosowanie twierdzenia Pitagorasa warto wyłączać czynnik przed pierwiastek. Wobec tego nauczymy tej operacji teraz, a wrócimy do niej w klasie ósmej (rozdział 2), kiedy będzie mowa o własnościach pierwiastków.

Zacznijmy od obliczania pierwiastka z iloczynu dwóch liczb, z których każda jest kwadratem liczby naturalnej, na przykład $\sqrt{25 \cdot 49}$. Zapytajmy, czy uczniowie mają pomysł, jak to sprytnie obliczyć. Może zauważą, że

$$\sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7, \quad \text{bo} \quad (5 \cdot 7)^2 = 5^2 \cdot 7^2 = 25 \cdot 49.$$

Ponieważ $5 = \sqrt{25}$, a $7 = \sqrt{49}$, więc mamy równość

$$\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49}.$$

Pierwiastek iloczynu okazał się równy iloczynowi pierwiastków. Czy tak samo jest w przypadku, kiedy czynniki pod pierwiastkiem nie są kwadratami liczb naturalnych?

Sprawdźmy, czy

$$\sqrt{17 \cdot 12} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{12}.$$

Podnosząc do kwadratu iloczyn po prawej stronie równości, trzeba podnieść do kwadratu każdy jego czynnik:

$$(\sqrt{17} \cdot \sqrt{12})^2 = (\sqrt{17})^2 \cdot (\sqrt{12})^2 = 17 \cdot 12.$$

Widać, że zamiast 17 i 12 mogą być dowolne liczby. Zatem pierwiastek iloczynu można zastąpić iloczynem pierwiastków.

Niech uczeń zastosuje poznaną własność do $\sqrt{36 \cdot 3}$. Otrzyma:

$$\sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Jak widać, stosowanie poznanej własności (zwanej wyłączaniem czynnika przed pierwiastek) pozwala zmniejszyć liczbę pod pierwiastkiem. Umówmy się, że będziemy to robić, jeśli tylko będzie można. Weźmy pod uwagę, że dojście do wprawy w wyłączaniu czynnika przed pierwiastek wymaga sporej liczby ćwiczeń — dostarczmy uczniom tyle, ile potrzebują.

Ćwiczenie 1. Wyłącz czynnik przed pierwiastek:
$\sqrt{24}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{40}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{27}$ $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$.

Ćwiczenie 2. Oblicz przekątną kwadratu o boku 5.

W ćwiczeniu 2 uczeń otrzyma $\sqrt{25 + 25} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 3. Oblicz przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $2\sqrt{3}$ i $2\sqrt{5}$.

W ćwiczeniu 3 zadbajmy o to, aby po obliczeniach

$$(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 12 + 20 = 32$$

uczeń wyłączył czynnik przed pierwiastek:

$$\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}.$$

Ćwiczenie 4. Jeden z boków prostokąta ma długość 2, a przekątna prostokąta jest równa 4. Oblicz długość drugiego boku.
⟨Nie zapomnij o wyłączeniu czynnika przed pierwiastek.⟩

Zadania

1. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi $2\sqrt{5}$, a jedna z przyprostokątnych jest równa $\sqrt{2}$. Oblicz drugą przyprostokątną.
2. Prostokąt ma wymiary 4 i $2\sqrt{3}$. Oblicz długość przekątnej prostokąta.
3. Jeden z boków prostokąta ma długość $2\sqrt{2}$, a jego przekątna $2\sqrt{5}$. Oblicz długość drugiego boku prostokąta.
4. Oblicz przekątną kwadratu o boku 7.
5. Oblicz wysokość trójkąta równobocznego o boku 8.

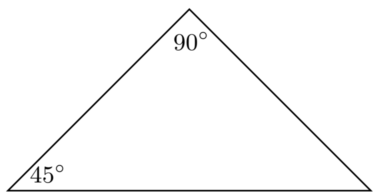
Lekcja 7. Ekierki, czyli szczególne trójkąty prostokątne

W matematyce szkolnej ekierkami nazywamy trójkąty prostokątne, w których dwa pozostałe kąty są równe 45 lub 30 i 60 stopni[8]*. Pokażemy, że w takich trójkątach jeden bok determinuje dwa pozostałe.*

Jeśli uczniowie przypomną sobie, że w ekierkach są kąty 45°, 30° i 60° stopni, to temat lekcji stanie się zrozumiały. W razie potrzeby można by zacząć od pokazania obu rodzajów ekierek.

Powiedzmy, że w trójkątach-ekierkach wystarczy znać długość jednego boku, aby obliczyć długości dwóch pozostałych, co zaraz sprawdzimy.

Zacznijmy od trójkąta prostokątnego z kątem 45°



i sprawdźmy, czy uczeń wie, że jest to trójkąt równoramienny.

Ćwiczenie 1. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego z kątem 45° jest równa 7. Oblicz przeciwprostokątną.
⟨Ile wynosi druga przyprostokątna?⟩

Teraz rozważymy przypadek, kiedy w takim trójkącie dana jest przeciwprostokątna, a trzeba obliczyć przyprostokątne.

- Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego z kątem 45° wynosi 10. Oblicz przyprostokątne.

[8] Nazwa wzięła się stąd, że takie właśnie kąty mają ekierki, które są przyborami geometrycznymi.

Zapytajmy o sumę kwadratów przyprostokątnych: ile otrzymamy, jeśli podniesiemy do kwadratu każdą z przyprostokątnych i wyniki dodamy?

Na mocy twierdzenia Pitagorasa jest to kwadrat przeciwprostokątnej, a więc 10^2, czyli 100.

Ile wobec tego przypada na kwadrat jednej przyprostokątnej?

Połowa ze 100, ponieważ przyprostokątne są równe.

Zatem kwadrat przyprostokątnej jest równy 50, skąd przyprostokątna to $\sqrt{50}$, czyli $5\sqrt{2}$.

Warto odnotować, że zadanie można rozwiązać za pomocą równania. Niech uczeń oznaczy przyprostokątną literą x i zapisze związek między bokami:

$$x^2 + x^2 = 100.$$

Z rozwiązaniem równania nie powinno być problemu:

$$2x^2 = 100, \quad x^2 = 50, \quad x = \ldots$$

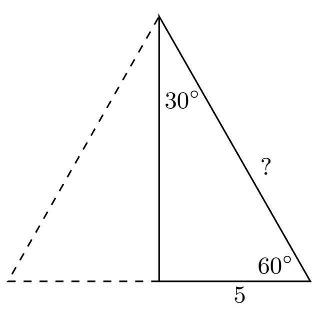
Ćwiczenie 2. Przekątna kwadratu jest równa 4. Oblicz bok kwadratu. ⟨Znajdź odpowiedni trójkąt prostokątny.⟩

W ćwiczeniu 2 trzeba zauważyć, że połowa kwadratu jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Uczeń może rozdzielić kwadrat przeciwprostokątnej, czyli 16, na kwadraty przyprostokątnych, a równie dobrze może posłużyć się równaniem: $x^2 + x^2 = 16$. Tak czy inaczej otrzyma $2\sqrt{2}$.

Z trójkątem prostokątnym z kątami 30° i 60° jest nieco więcej kłopotu. Zacznijmy od przypadku, kiedy dana jest krótsza przyprostokątna.

- Przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta 30° jest równa 5. Oblicz pozostałe boki trójkąta.

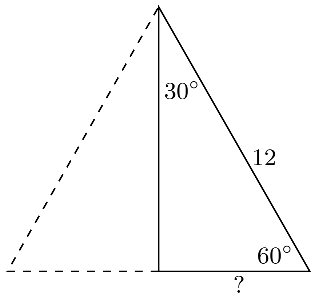
Doradźmy, aby dorysować odbicie symetryczne trójkąta-ekierki względem dłuższej przyprostokątnej



i odczytać długość przeciwprostokątnej.

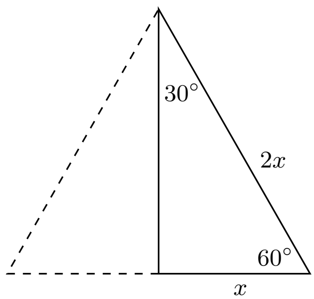
Trzeba zauważyć, że otrzymujemy trójkąt równoboczny o boku 10. Niech uczeń dokończy zadanie samodzielnie.

Przypadek, kiedy dana jest przeciwprostokątna, jest praktycznie taki sam:



Ćwiczenie 3. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego z kątem 30° jest równa 12. Oblicz przyprostokątne.

Przy okazji podkreślmy, że trick z uzupełnianiem trójkąta prostokątnego z kątem 30° do trójkąta równobocznego



warto zapamiętać, bo bardzo często się przydaje. Przyda się także w ostatnim zadaniu.

- Dłuższa przyprostokątna jest równa 9. Oblicz krótszą przyprostokątną.

Myślę, że najłatwiej będzie ułożyć równanie. Niech uczeń popatrzy na ostatni rysunek i napisze związek między bokami:

$$9^2 + x^2 = (2x)^2.$$

Rozwiązanie tego równania formalnie wykracza poza podstawę programową, ale nie jest trudne. Trzeba tylko uważać, aby uczeń dobrze podniósł $2x$ do kwadratu — nie tylko x do kwadratu, ale także 2 do kwadratu:

$$(2x)^2 = (2 \cdot x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4 \cdot x^2 = 4x^2.$$

Niewiadome najlepiej przenieść na prawą stronę:

$$81 = 3x^2, \quad x^2 = 27, \quad x = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}.$$

Zadania

1. Oblicz przyprostokątne trójkąta prostokątnego równoramiennego, którego przeciwprostokątna jest równa $6\sqrt{2}$.
2. Oblicz bok kwadratu o przekątnej 6.
3. Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku 8.
   ⟨Podziel ten trójkąt na dwa trójkąty-ekierki i oblicz wysokość trójkąta.⟩
4. Oblicz bok trójkąta równobocznego o wysokości 6.
   ⟨Podziel trójkąt na dwa trójkąty-ekierki, oznacz literą krótszą przyprostokątną i ułóż odpowiednie równanie.⟩


PROGRAM
PARTNERSKI
GRUPY HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA
Helion

TWOJE DZIECKO WRESZCIE ZROZUMIE MATEMATYKĘ!

Matematyka z natury rzeczy nie jest łatwa. Dla wielu to najtrudniejszy przedmiot w szkole. Sprawia problemy nie tylko uczniom, ale także tym, którzy jej uczą. Niełatwo przygotować lekcje tak, aby uczynić zrozumiałym to, co trudno zrozumieć. Autorka przekonała się o tym w czasie swojej pracy jako nauczycielka, a teraz swoimi pomysłami dzieli się z czytelnikami, proponując scenariusze lekcji w szkole podstawowej. Zgromadzony tu materiał jest zgodny z podstawą programową nauczania matematyki w szkole podstawowej.

Domowe lekcje matematyki to propozycja dla opiekunów, którzy chcą pomóc dzieciom w nauce tego przedmiotu. Każdej lekcji towarzyszą starannie dobrane do danego tematu ćwiczenia, za pomocą których autorka pokazuje, w jaki sposób rozmawiać z podopiecznym i jakie pytania mu zadawać, aby dostrzegł istotę omawianego zagadnienia. A w efekcie — zrozumiał matematykę, bo, jak twierdzi francuski filozof Alain Badiou, „bez matematyki jesteśmy ślepi".

POTĘGI I PIERWIASTKI

RÓWNANIA I WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

PRZYSTAWANIE I SYMETRIA

TWIERDZENIE PITAGORASA

OBWÓD, POLE I OBJĘTOŚĆ

PROPORCJONALNOŚĆ I OBLICZENIA PROCENTOWE

UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA PŁASZCZYŹNIE

GRAFICZNE PRZEDSTAWIANIE DANYCH

ELEMENTY KOMBINATORYKI I RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Helion EDUKACJA

Helion

KOD KORZYŚCI
Sięgnij po więcej!

helion.pl

HELION SA
ul. Kościuszki 1c
44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
helion@helion.pl

ISBN 978-83-283-9388-2

9 788328 393882

Cena: 39,90 zł