DANUTA ZAREMBA

Czy można mnożyć pieniądze?

ZDROWY ROZSĄDEK W NAUCZANIU MATEMATYKI

Helion

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiejkolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Helion SA dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Helion SA nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Skład komputerowy w systemie wykonała autorka.

Grafika na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.com

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *http://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
http://helion.pl/user/opinie/czymom
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-283-7088-3

Copyright © Helion 2021

Printed in Poland.

• Kup książkę
• Poleć książkę
• Oceń książkę

• Księgarnia internetowa
• Lubię to! » Nasza społeczność

Spis treści

Kup książkę Poleć książkę

Kup książkę

Poleć książkę

8. Czy można mnożyć pieniądze?

Sądzę, że nikt nie ma wątpliwości, jaka jest odpowiedź na pytanie postawione w tytule niniejszego artykułu: nie tylko można, ale nawet trzeba! — szczególnie teraz, w czasach kapitalizmu.

Życząc Czytelnikom sukcesów w tej materii, przechodzę do spraw dotyczących nauczania matematyki.

Z jednostkami czy bez

Zacznę od przykładu, w którym uczeń szkoły podstawowej rozwiązuje zadanie dotyczące zakupów. Oto jego obliczenia:

$$\begin{array}{rcr} 3 \cdot 2{,}45\ \text{zł} & = & 7{,}35\ \text{zł} \\ 5 \cdot 0{,}75\ \text{zł} & = & 3{,}75\ \text{zł} \\ 2 \cdot 3{,}24\ \text{zł} & = & 6{,}48\ \text{zł} \\ \hline \text{Razem:} & & 17{,}58\ \text{zł} \end{array}$$

Tego rodzaju sposób zapisywania obliczeń wzbudza emocje wśród nauczycieli. Niektórzy uważają, że tak pisać nie można. Argumentują, że działania arytmetyczne wykonuje się na liczbach, a nie na liczbach czegoś. Formalnie, tzn. z punktu widzenia matematyki jako nauki, mają rację. Pamiętajmy jednak, że w szkole, a szczególnie w szkole podstawowej, nie dominuje matematyka jako nauka teoretyczna. Najważniejsza jest jej adaptacja do sytuacji życia codziennego.

Działania matematyczne wykonywane na co dzień są nie tyle operacjami w zbiorach liczbowych podlegającymi pewnym prawom, co określonymi czynnościami mającymi sens potoczny, zdroworozsądkowy. W życiu nie ma abstrakcyjnych zbiorów liczbowych; wykonujemy działania na liczbach, które w danej sytuacji mierzą coś konkretnego.

Dodawanie jest dla ucznia czynnością dołączania, a odejmowanie zabieraniem (ujmowaniem). W sposób naturalny można zatem dodawać lub odejmować kwoty pieniężne, liczby kilogramów lub centymetrów, liczby uczniów w różnych klasach itp. W wyniku tych działań otrzymujemy odpowiednią kwotę, liczbę kilogramów lub centymetrów, liczbę uczniów itp.

Mnożenie przez liczbę naturalną również jest działaniem życiowym. Jest ono szczególnym przypadkiem dodawania. W sensie potocznym mnożyć można nie tylko liczby czegoś, ale także różne obiekty, a nawet cechy i zjawiska. Mówimy: trzy razy większy majątek, dwa razy grubszy człowiek, dwa razy mniejszy apetyt, jedno sto razy lepsze od drugiego itp.

Mnożenie oznacza zwielokrotnienie, zwiększenie czegoś pewną liczbę razy. Nie ulega wątpliwości, że działania:

$$2 \cdot 5 \text{ zł}, \quad 3 \cdot 70 \text{ kg} \quad \text{i} \quad 4 \cdot 5 \text{ cm}$$

mają sens zdroworozsądkowy.

Zauważmy przy okazji, że w podanych iloczynach czynniki nie są równouprawnione i mnożenie ma sens tylko w jednej kolejności:

$$2 \cdot 5 \text{ zł} = 5 \text{ zł} + 5 \text{ zł},$$

natomiast wyrażenie

$$5 \text{ zł} \cdot 2$$

nic nie znaczy.

Czwarte działanie, dzielenie, też ma interpretację czynnościową, i to dwojaką. W niektórych sytuacjach poszukujemy odpowiedzi na pytanie, ile otrzymamy, dzieląc daną liczbę czegoś na ustaloną liczbę równych części. W innych sytuacjach interesuje nas, ile razy dana liczba czegoś „mieści się” w innej liczbie tego samego.

Obliczając,

jaką kwotę otrzyma każdy z trzech równouprawnionych spadkobierców, jeżeli do podziału między nich jest kwota 12 000 zł,

dzielimy podaną kwotę na 3 równe części:

$$12\,000 \text{ zł} : 3 = 4000 \text{ zł}.$$

Znajdując odpowiedź na pytanie,

ile tabliczek czekolady po 2,50 zł można kupić za 10 zł,

sprawdzamy, ile razy kwota 2,50 zł mieści się w kwocie 10 zł:

$$10 \text{ zł} : 2{,}50 \text{ zł} = 4.$$

Tego rodzaju działania wykonujemy, rozwiązując problemy praktyczne. Operując podanymi liczbami, uczeń powinien cały czas kojarzyć je z wielkościami, które mierzą. Tylko wtedy ma szansę uporać się z problemem. Nie stanie się nic złego, jeżeli pozwolimy uczniowi posłużyć się zapisem uwzględniającym znaczenie poszczególnych liczb. Może to być dla niego istotnym ułatwieniem.

Nie chcę przez to powiedzieć, że mamy dążyć do takiego zapisywania wykonywanych działań. Byłoby to żmudne, a czasem nawet ryzykowne. Z reguły staramy się dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić liczby bez złotych, kilogramów i centymetrów. Pamiętamy jednak o znaczeniu tych liczb i w odpowiedzi do zadania dodajemy owe złote, kilogramy lub centymetry.

Jednostki w fizyce

Na zakończenie pozwolę sobie zauważyć, że trudno jest dopatrzeć się sensu zdroworozsądkowego w działaniach typu

$$5\text{ cm}\cdot 4\text{ cm} \quad \text{i} \quad 60\text{ km/h}\cdot 2\text{ h}.$$

Mimo to czasem tak piszemy, szczególnie w fizyce. Jednostki są bowiem dobrane w ten sposób, że można wprowadzić na nich „działania”, podlegające formalnie tym samym prawom, co działania arytmetyczne na liczbach:

$$\begin{aligned} a\cdot a = a^2 &\quad\text{———}\quad \text{cm}\cdot\text{cm} = \text{cm}^2, \\ \frac{a}{b}\cdot b = a &\quad\text{———}\quad \text{km/h}\cdot\text{h} = \text{km}. \end{aligned}$$

Pamiętajmy jednak, że działanie typu

$$\text{cm}\cdot\text{cm} \quad \text{lub} \quad \text{km/h}\cdot\text{h}$$

jest jednak zupełnie czymś innym niż mnożenie liczb. Ale to już inny temat.

37. Jak nie obliczać procentów

W zadaniach rachunkowych liczy się nie tylko wynik, ale również sposób, w jaki go otrzymujemy. Dążymy do tego, aby obliczać w sposób racjonalny i możliwie prosty. Pracowitość rachunkowa nie jest w cenie, natomiast w cenie jest upraszczanie obliczeń, które nie tylko skraca czas dochodzenia do wyniku, ale zmniejsza prawdopodobieństwo popełnienia błędu rachunkowego. Wydawać by się mogło, że wszyscy tak uważamy. Tymczasem praktyka szkolna nie zawsze to potwierdza. Niekiedy nauczający jest tak skoncentrowany na uczeniu sztywnych schematów rachunkowych, że nie zauważa, jak opłakane mogą być tego skutki.

Tylko nie tak

Internet, w sporej mierze funkcjonujący na zasadzie „Pisać każdy może, trochę lepiej lub trochę gorzej”[6], jest pełen różnych „dobrych” rad, w tym także instrukcji rozwiązywania zadań matematycznych. Pozwolę sobie pokazać przykład dotyczący obliczeń procentowych. Chodzi o znalezienie liczby, której procent jest dany. Zadanie sprowadza się do pytania:

- Jaka to liczba, której 25% to 2?

Podane są dwa sposoby rozwiązania.

W jednym z nich szukaną liczbę oznacza się literą x, po czym następują obliczenia:

$$25\% = 0{,}25, \quad 0{,}25 \cdot x = 2, \quad x = 2 : 0{,}25, \quad x = 8.$$

Drugi sposób polega się na obliczeniu 1% liczby i pomnożeniu wyniku przez 100:

$$1\% \text{ to } 2 : 25, \quad 2 : 25 = \frac{2}{25}, \quad \frac{2}{25} \cdot 100 = 8.$$

Po tym zadaniu następuje reguła ogólna ujmująca oba podane sposoby obliczania oraz jest jeszcze kilka zadań z rozwiązaniami, zawsze z niewiadomą x.

Autor przytoczonego przykładu zapewne uważa, że trzeba nauczyć tylko takich sposobów rozwiązywania, które są uniwersalne, tzn. funkcjonują

[6] Tak jak „śpiewać” w znanej piosence z tekstem Jonasza Kofty.

Kup książkę Poleć książkę

dla wszystkich liczb, bo wtedy uczeń zawsze sobie poradzi, a na lekcjach jest zbyt mało czasu, aby uczyć czegoś więcej. Obawiam się, że nie jest to opinia odosobniona. I właśnie dlatego powstał ten artykuł.

Takich niedobrych, wręcz szkodliwych propozycji nauczania matematyki napotykamy sporo właśnie w internecie, gdzie każdy może zamieścić to, co chce. I zamieszcza. Trudno temu przeciwdziałać, nie ma możliwości wprowadzenia cenzury. Zdajemy sobie sprawę, że warto czytać tylko dobre teksty, resztę po prostu ignorując. Jednak czasem trudno przejść nad czymś do porządku dziennego, szczególnie jeżeli dotyczy ważnego tematu.

Od czego zacząć

Umiejętność sprawnego przeprowadzania obliczeń procentowych przydaje się na co dzień, przy czym często posługujemy się „okrągłymi" (np. 5, 10, 30 czy 50) procentami. Do takich wielkości zaokrąglamy i zastępujemy dokładne rachunki szacowaniem, kiedy chcemy zorientować się w wysokości rabatu czy podwyżki ceny benzyny zapowiedzianej w procentach.

W obliczeniach procentowych oprócz niezawodnych reguł potrzebny jest także (a może przede wszystkim) zdrowy rozsądek. Stwórzmy więc okazje do posługiwania się zdrowym rozsądkiem na lekcjach matematyki. Kiedy uczeń wyobrazi sobie pewną wielkość podzieloną na 100 równych części i dowie się, że 1% danej wielkości oznacza jedną setną część tej wielkości, to zda sobie sprawę, że 100% to 2 razy po 50%, 4 razy po 25%, 5 razy po 20% i 10 razy po 10%. To pozwoli uczniowi nie tylko obliczać okrągłe procenty danej liczby, wyrażać pewne procenty przez inne (np. 40% to 2 razy po 20%), ale także znajdować liczbę, znając jej 20%, 25% czy 150%.

Chcąc skutecznie kształcić tego rodzaju sprawności rachunkowe, trzeba zacząć obliczenia procentowe nie od wzoru 17% z a to $\frac{17}{100} \cdot a$, ale właśnie od procentów wyrażających się prostymi ułamkami zwykłymi.

Wtedy zamiast obliczać 10% z 500 według schematu[7]

$$\frac{10}{100} \cdot 500 = \frac{10 \cdot 500}{100} = 10 \cdot 5 = 50,$$

uczeń po prostu podzieli 500 na 10 równych części. I o to właśnie chodzi!

[7] Taki rachunek znalazłam również w internecie.

Kup książkę Poleć książkę

53. Sinus w warunkach maturalnych

Zapewne znają Państwo różne dowcipy z czasów funkcjonowania studium wojskowego dla studentów. W jednym z nich jest mowa o tym, jak to pewien major, prowadzący zajęcia z balistyki, obliczał kąt nachylenia działa. Z wykonanych przez niego rachunków wynikało, że sinus kąta jest równy 2,5. Na to jeden ze słuchaczy zaprotestował, że to nie jest możliwe, bo przecież sinus dowolnego kąta nie przekracza liczby 1. Major z lekka się zaniepokoił, ale po chwili znalazł argument: Sinus w warunkach bojowych może osiągać wyższe wartości!

Anegdotę tę przypomniałam sobie podczas rozmowy z tegorocznym[11] maturzystą, który opowiedział mi, jak rozwiązał jedno z zadań arkusza podstawowego. Chodziło o obliczenie wartości wyrażenia

$$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha}$$

przy założeniu, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$.

Maturzysta zrobił to tak:

Skoro $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$, to $\sin\alpha = 2$ oraz $\cos\alpha = 5$, skąd

$$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3\cdot 5 - 2\cdot 2}{2 - 5\cdot 5} = -\frac{11}{23}.$$

Mimo że rozumował błędnie, wręcz fatalnie, otrzymał poprawną odpowiedź. Nie jest to nic dziwnego, ponieważ z założenia $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$ wynika, że $\sin\alpha : \cos\alpha = \frac{2}{5}$, skąd $\sin\alpha = 2c$, $\cos\alpha = 5c$, gdzie c jest pewną stałą, a ona w obliczeniach się kasuje:

$$\frac{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{3\cdot 5c - 2\cdot 2c}{2c - 5\cdot 5c} = \frac{3\cdot 5 - 2\cdot 2}{2 - 5\cdot 5}.$$

Zadanie było dane w formie zamkniętej, trzeba było wybrać jedną z czterech podanych odpowiedzi. Maturzysta wybrał prawidłowo, więc zapewne dostał automatycznie 1 punkt. Jak widać, także w warunkach maturalnych sinus i cosinus mogą przekraczać 1…

[11] Rok 2014.

Kup książkę Poleć książkę


PROGRAM
PARTNERSKI
GRUPY HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA
Helion

Przekonaj uczniów,
ŻE MATMA WCALE NIE MUSI BYĆ NUDNA I NIEZROZUMIAŁA!

Matematyka jest najlepszym przykładem przedmiotu, który zupełnie niesłusznie ma opinię trudnego, nudnego i nieprzydatnego w codziennym życiu. Tę złą sławę zawdzięcza głównie przestarzałym metodom edukacyjnym, niepodzielnie panującym w większości polskich szkół, oraz nieinteresującym, z punktu widzenia uczniów, przykładom i zadaniom, które są zmuszeni rozwiązywać.

WYJDŹ POZA SCHEMAT I ZERWIJ Z TRADYCJĄ ZŁEGO NAUCZANIA MATEMATYKI!

Dowiedz się, jak prowadzić interesujące lekcje i zachęcać uczniów do aktywności, poznaj sposoby, dzięki którym dostrzegą zastosowanie zdobytej wiedzy poza murami szkoły, i spraw, aby nauka stała się dla nich prawdziwą przygodą. Zebrane w tej książce felietony pomogą Ci przygotowywać ciekawe zajęcia, zrozumieć młodych ludzi i ułatwić im kontakt z matematyką. Autorka dzieli się swoim bogatym doświadczeniem i nieszablonowym podejściem do tematu, a także pokazuje, jak w pracy nauczyciela stosować dobre praktyki i korzystać z przykładów, które uczą logicznego myślenia, zamiast powielać schematy.

MYŚLENIE PONAD SCHEMATY
SAMODZIELNE WYCIĄGANIE WNIOSKÓW
NIESZABLONOWE METODY
OBALANIE STARYCH MITÓW
RADOŚĆ ZE ZDOBYWANIA WIEDZY
EKSPERYMENTY, KTÓRE UCZĄ
BŁĘDY JAKO OKAZJA DO NAUKI
PRZYKŁADY Z ŻYCIA WZIĘTE

SPRAW, ABY LEKCJE MATEMATYKI BYŁY NIEZAPOMNIANĄ PRZYGODĄ!

Helion
helion.pl
HELION SA
ul. Kościuszki 1c
44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
helion@helion.pl
INFORMATYKA W NAJLEPSZYM WYDANIU

Sprawdź nasze szkolenia!
SZKOLENIA
AKADEMIA IT & BUSINESS
HELIONSZKOLENIA.PL
KOD KORZYŚCI
Sięgnij po więcej!

ISBN 978-83-283-7088-3
9 788328 370883
Cena: 34,90 zł