Stanisław Prus
Adam Stachura

# ANALIZA FUNKCJONALNA W ZADANIACH

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

# ANALIZA FUNKCJONALNA W ZADANIACH

**Stanisław Prus**
**Adam Stachura**

# ANALIZA FUNKCJONALNA W ZADANIACH

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2009

Projekt okładki i stron tytułowych **Małgorzata Podziomek**

Redaktor **Agnieszka Grabarczyk**

Korekta **Małgorzata Kopczyńska**



ISBN 978-83-01-15228-4

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10
tel. 022 69 54 321
faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

# Spis treści

## Rozwiązania

# Wstęp

Prezentowany zbiór zadań z analizy funkcjonalnej zawiera zadania odpowiadające zakresowi materiału z tego przedmiotu, jaki jest przeważnie wykładany w czasie studiów wyższych. Materiał ten obejmuje teorię przestrzeni Banacha i Hilberta, a także zagadnienia dotyczące funkcjonałów i operatorów liniowych ograniczonych na takich przestrzeniach. Zbiór zadań jest więc przeznaczony głównie dla studentów kierunku matematyki studiów uniwersyteckich wszystkich stopni. Mogą z niego korzystać również studenci innych kierunków, nie tylko uniwersyteckich, dla których analiza funkcjonalna jest przedmiotem podstawowym lub pomocniczym. Żywimy zresztą nadzieję, że zbiór nasz zainteresuje nie tylko studentów, lecz także pracowników nauki, którzy wykorzystują metody i pojęcia analizy funkcjonalnej w swojej pracy badawczej.

W celu ułatwienia korzystania ze zbioru tak szerokiemu gronu Czytelników podzieliliśmy zadania na trzy grupy — zadania łatwe, średnio trudne i trudne. Zadania ze wszystkich trzech grup są zaopatrzone w szczegółowe rozwiązania. Wyjątkiem jest niewielka stosunkowo liczba zadań uważanych przez nas za szczególnie łatwe, gdzie ograniczamy się do podania odpowiedzi oraz ogólnych wskazówek. Kryteria zakwalifikowania konkretnego zadania do jednej z grup mają, rzecz jasna, charakter subiektywny i są odbiciem naszych odczuć. Istotny wpływ na dobór i uszeregowanie zadań miały oczywiście nasze doświadczenia dydaktyczne zdobyte podczas prowadzenia zajęć w Uniwersytecie Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie i Katolickim Uniwersytecie Lubelskim Jana Pawła II.

Analiza funkcjonalna jest przedmiotem raczej trudnym, wykorzystującym metody i twierdzenia wielu dziedzin matematyki. Pisząc ten zbiór, zakładaliśmy, że potencjalni Czytelnicy znają podstawowe pojęcia i fakty teorii mnogości, algebry liniowej, rachunku różniczkowego funkcji jednej oraz wielu zmiennych, funkcji zmiennej zespolonej oraz teorii miary i całki Lebesgue'a, w zakresie odpowiadającym minimum programowemu dla studiów uniwersyteckich pierwszego stopnia. Począwszy od trzeciego rozdziału postulowana jest także znajomość podstaw topologii przestrzeni metrycznych. Wreszcie do zrozumienia i rozwiązania zadań z rozdziału ostatniego (gdzie omawiane są przestrzenie sprzężone i operatory sprzężone) niezbędna jest znajomość takich pojęć topologii ogólnej, jak różne metody wprowadzania topologii w zbiorze, baza i baza otoczeń punktu w przestrzeni topologicznej, a także odwzorowania ciągłe przestrzeni topologicznych.

Każdy spośród sześciu rozdziałów zbioru poprzedza krótki wstęp, w którym zebraliśmy potrzebne definicje i twierdzenia. Pochodzą one z powszechnie dostępnych podręczników, przy czym przyjęliśmy zasadę cytowania wyłącznie pozycji w języku polskim. Mamy nadzieję, że zamieszczenie wspomnianych wstępów ułatwi Czytelnikom korzystanie ze zbioru, chociażby z tego powodu, że autorzy podręczników często w nieco odmienny sposób formułują pojęcia, a także założenia twierdzeń. W spisie tzw. literatury dodatkowej zamieściliśmy książki, które miały pośredni wpływ na zawartość zbioru (pozycje te nie są cytowane w tekście).

*Stanisław Prus, Adam Stachura*

Lublin, 2007

# Oznaczenia

| | |
|---|---|
| $\mathbb{K}$ | – ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ albo ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ **3** |
| $\mathrm{Lin}(A)$ | – podprzestrzeń liniowa generowana przez zbiór $A$ **3** |
| $\mathrm{Conv}(A)$ | – powłoka wypukła zbioru $A$ **3** |
| $\mathrm{Ext}(A)$ | – zbiór punktów ekstremalnych zbioru $A$ **4** |
| $\dim(V)$ | – wymiar przestrzeni $V$ **4** |
| $\mathrm{codim}(V)$ | – kowymiar podprzestrzeni $V$ **4** |
| $W_1 \oplus W_2$ | – suma prosta podprzestrzeni $W_1$, $W_2$ **4** |
| $\mathrm{Map}(X, \mathbb{K})$ | – przestrzeń wszystkich funkcji $f : X \to \mathbb{K}$ **4** |
| $B(X)$ | – przestrzeń funkcji ograniczonych $f : X \to \mathbb{K}$ **4** |
| $BC(X)$ | – przestrzeń funkcji ograniczonych i ciągłych $f : X \to \mathbb{K}$ **5** |
| $C(X)$ | – przestrzeń funkcji ciągłych $f : X \to \mathbb{K}$ **5** |
| $C_0(X)$ | – przestrzeń funkcji ciągłych $f : X \to \mathbb{K}$ znikających w nieskończoności **5** |
| $M(X)$ | – przestrzeń regularnych miar borelowskich w $X$ **5** |
| $\mathcal{M}(\Omega, \sigma, \mu)$ | – przestrzeń funkcji mierzalnych $f : \Omega \to \mathbb{K}$ **5** |
| $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ | – przestrzeń funkcji istotnie ograniczonych $f : \Omega \to \mathbb{K}$ **5** |
| $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ | – przestrzeń funkcji $f : \Omega \to \mathbb{K}$ całkowalnych z $p$-tą potęgą **6** |
| $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ | – przestrzeń funkcji $f : \Omega \to \mathbb{K}$ równych 0 prawie wszędzie **6** |
| $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ | – przestrzeń $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)/\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ **6** |
| $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ | – przestrzeń $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)/\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ **6** |
| $l_p(T)$ | – przestrzeń $L_p(T)$ dla miary liczącej w $T$ **6** |
| $l_p$ | – przestrzeń ciągów sumowalnych z $p$-tą potęgą **6** |
| $l_\infty$ | – przestrzeń ciągów ograniczonych **6** |
| $c$ | – przestrzeń ciągów zbieżnych **6** |
| $c_0$ | – przestrzeń ciągów zbieżnych do 0 **6** |
| $c_{00}$ | – przestrzeń ciągów o skończonej liczbie wyrazów różnych od 0 **6** |
| $\sup \mathrm{ess}$ | – supremum istotne **7, 11** |
| $H_\alpha(X)$ | – przestrzeń funkcji $f : X \to \mathbb{K}$ spełniających warunek Höldera **7** |
| $\mathrm{Lip}(X)$ | – przestrzeń funkcji $f : X \to \mathbb{K}$ spełniających warunek Lipschitza **7** |
| $ba(\Sigma)$ | – przestrzeń funkcji $\mu : \Sigma \to \mathbb{K}$ skończenie addytywnych **9** |
| $\mathrm{supp}(f)$ | – nośnik funkcji $f$ **11** |
| $\Vert x \Vert$ | – norma wektora $x$ **16** |
| $B_X(x; r)$, $B(x; r)$ | – kula otwarta o środku $x$ i promieniu $r$ **16** |
| $B_X[x; r]$, $B[x; r]$ | – kula domknięta o środku $x$ i promieniu $r$ **16** |
| $S_X[x; r]$, $S[x; r]$ | – sfera o środku $x$ i promieniu $r$ **16** |
| $\mathrm{dist}(x, A)$ | – odległość punktu $x$ od zbioru $A$ **17** |
| $\mathrm{diam}(A)$ | – średnica zbioru $A$ **17** |
| $\mu_M$ | – funkcjonał Minkowskiego zbioru $M$ **17** |

| | |
|---|---|
| $L_p(\Omega)$ | – przestrzeń $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ **18** |
| $\|x\|_p^{(n)}$ | – norma w $\mathbb{K}^n$ dana wzorem $\|x\|_p^{(n)} = \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ **18** |
| $\|x\|_\infty^{(n)}$ | – norma w $\mathbb{K}^n$ dana wzorem $\|x\|_\infty^{(n)} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|x_j\|$ **18** |
| $C^{(1)}([a,b])$ | – przestrzeń funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ z ciągłą pochodną **20** |
| $BC^{(1)}(\mathbb{R})$ | – przestrzeń funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ z $f' \in BC(\mathbb{R})$ **20** |
| $C^{(m)}([a,b])$ | – przestrzeń funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ z ciągłą pochodną rzędu $m$ **21** |
| $A^1$ | – przestrzeń Bergmana **30** |
| $\operatorname{Int} A$ | – wnętrze zbioru $A$ **33** |
| $\overline{A}$ | – domknięcie zbioru $A$ **33** |
| $\overline{\operatorname{Lin}}(A)$ | – domknięcie $\operatorname{Lin}(A)$ **33** |
| $\overline{\operatorname{Conv}}(A)$ | – domknięcie $\operatorname{Conv}(A)$ **33** |
| $A \div B$ | – różnica symetryczna zbiorów $A$, $B$ **45** |
| $\langle x, y\rangle$ | – iloczyn skalarny wektorów $x$ **49** |
| $x \perp y$ | – wektory $x$ **50** |
| $x \perp M$ | – $x$ jest ortogonalny do zbioru $M$ **50** |
| $M^\perp$ | – dopełnienie ortogonalne zbioru $M$ **50** |
| $L'(X,Y)$ | – przestrzeń operatorów liniowych $A : X \to Y$ **63** |
| $I_X$ | – operator tożsamościowy na $X$ **63** |
| $\ker A$ | – jądro operatora $A$ **63** |
| $L(X,Y)$ | – przestrzeń operatorów liniowych ograniczonych $A : X \to Y$ **63** |
| $X^*$ | – przestrzeń sprzężona do $X$ **64** |
| $X'$ | – przestrzeń funkcjonałów liniowych $f : X \to \mathbb{K}$ **65** |
| $\sigma_p(A)$ | – widmo punktowe operatora $A$ **65** |
| $\rho(A)$ | – zbiór rezolwenty operatora $A$ **65** |
| $R_A$ | – rezolwenta operatora $A$ **65** |
| $\sigma(A)$ | – widmo operatora $A$ **65** |
| $V_a^b(y_f)$ | – wahanie funkcji $y_f$ na przedziale $[a,b]$ **82** |
| $X^{**}$ | – przestrzeń druga sprzężona do $X$ **83** |
| $\text{w-}\lim_{n\to\infty}$ | – słaba granica **84** |
| $\text{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty}$ | – słaba$^*$ granica **84** |
| $A^*$ | – operator sprzężony do $A$ **84** |
| $A^H$ | – operator $H$-sprzężony do $A$ **84** |

# Zadania

1

# Przestrzenie liniowe i ich podzbiory

W zbiorze tym $\mathbb{K}$ będzie oznaczać ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych albo ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Niech $V$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, $A, B \subset V$ będą zbiorami niepustymi i $t \in \mathbb{K}$. Będziemy stosować następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b : a \in A,\ b \in B\}\,, \\ A - B &= \{a - b : a \in A,\ b \in B\}\,, \\ tA &= \{ta : a \in A\}\,. \end{aligned}$$

Zbiór $A+B$ będziemy nazywać **sumą algebraiczną** zbiorów $A$ i $B$. Jeżeli $x \in V$, to będziemy pisać $x + A$ zamiast $\{x\} + A$. Ponadto piszemy $-A$ zamiast $(-1)A$. Przyjmujemy ponadto, że $A + \emptyset = A$ i $t \cdot \emptyset = \emptyset$.

Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $V$. Dla $x \in V$ zbiór $x + W$ będziemy nazywać **warstwą** wektora $x$ względem podprzestrzeni $W$. Symbol $V/W$ będzie oznaczać zbiór wszystkich warstw, tzn.

$$V/W = \{x + W : x \in V\}\,.$$

Zbiór ten jest przestrzenią liniową z działaniami określonymi w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (x + W) + (y + W) &= (x + y) + W, \\ t(x + W) &= tx + W \end{aligned}$$

dla wszystkich $x, y \in V$, $t \in \mathbb{K}$. Przestrzeń tę nazywamy **przestrzenią ilorazową** przestrzeni $V$ przez podprzestrzeń $W$.

Niech $A \subset V$ będzie zbiorem niepustym. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów ze zbioru $A$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $V$. Nazywamy ją **podprzestrzenią generowaną** (rozpinaną) przez zbiór $A$ i oznaczamy symbolem $\mathrm{Lin}(A)$. Natomiast zbiór wszystkich kombinacji wypukłych wektorów ze zbioru $A$ nazywamy **powłoką wypukłą** (albo otoczką wypukłą) tego zbioru i oznaczamy symbolem $\mathrm{Conv}(A)$.

Zbiór $A \subset V$ nazywamy zbiorem **gwiaździstym względem punktu** $a \in A$, jeżeli dla dowolnego $b \in A$ odcinek o końcach $a$ i $b$ zawiera się w $A$. Zbiór $A$ jest **gwiaździsty**, jeżeli istnieje punkt $a \in A$ taki, że $A$ jest zbiorem gwiaździstym względem tego punktu.

Niech $A$ będzie niepustym podzbiorem przestrzeni $V$. Punkt $e \in A$ nazywamy **punktem ekstremalnym** zbioru $A$, jeżeli implikacja

$$e = (1-t)x + ty \Longrightarrow (e = x \vee e = y)$$

jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej $t \in [0,1]$ i wszystkich punktów $x, y \in A$. Zbiór wszystkich punktów ekstremalnych zbioru $A$ oznaczamy przez $\mathrm{Ext}(A)$.

Mówimy, że zbiór $A \subset V$ jest **zbalansowany** (zrównoważony), jeżeli $tA \subset A$ dla dowolnego $t \in \mathbb{K}$ takiego, że $|t| \leqslant 1$, natomiast jest **pochłaniający**, jeżeli dla każdego $x \in V$ istnieje $t > 0$ takie, że $x \in tA$.

Niech $T$ będzie zbiorem niepustym. Układ wektorów $(b_t)_{t\in T}$ przestrzeni $V$ nazywamy **bazą Hamela**, jeżeli spełnia następujące warunki:

(1) zbiór $B = \{b_t : t \in T\}$ jest liniowo niezależny,
(2) zbiór $B$ generuje przestrzeń $V$, tzn. $V = \mathrm{Lin}(B)$.

**Twierdzenie 1.1 ([2], s. 253).** *Każda przestrzeń liniowa $V \neq \{\mathbf{0}\}$ ma bazę Hamela.*

Dowód tego twierdzenia jest niekonstruktywny, gdyż opiera się na pewniku wyboru. Uwaga ta dotyczy więc także zadań, w których wykorzystuje się to twierdzenie.

**Twierdzenie 1.2 ([2], s. 253).** *Niech $V$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeżeli $S$ jest liniowo niezależnym układem wektorów z $V$, to istnieje układ wektorów $S_0$ z $V$ taki, że $S \subset S_0$ i $S_0$ jest bazą Hamela przestrzeni $V$.*

**Twierdzenie 1.3 ([1], s. 59).** *Niech $(b_t)_{t\in T}$ i $(b'_t)_{t\in T'}$ będą bazami Hamela przestrzeni $V$. Wtedy zbiory $T$ i $T'$ są równoliczne.*

Jeżeli przestrzeń $V \neq \{\mathbf{0}\}$ ma skończoną bazę Hamela $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, to liczbę $n$ nazywamy **wymiarem** tej przestrzeni i piszemy $\dim(V) = n$. W przeciwnym razie mówimy, że $V$ jest przestrzenią **nieskończenie wymiarową** i piszemy $\dim(V) = +\infty$.

Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $V$. Wymiar przestrzeni $V/W$ nazywamy **kowymiarem** podprzestrzeni $W$ i oznaczamy symbolem $\mathrm{codim}(W)$.

Niech $W_1, W_2$ będą podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $V$. Podprzestrzeń $W = W_1 + W_2$ nazywamy **sumą prostą** podprzestrzeni $W_1$ i $W_2$, jeżeli $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Piszemy wtedy $W = W_1 \oplus W_2$.

Niech $V$ i $W$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Liniową bijekcję $f : V \to W$ nazywamy także **izomorfizmem algebraicznym** przestrzeni $V$ na przestrzeń $W$. Przestrzenie $V$ i $W$ są **algebraicznie izomorficzne**, jeżeli istnieje izomorfizm algebraiczny przestrzeni $V$ na $W$.

Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Symbolem $\mathrm{Map}(X, \mathbb{K})$ oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji $f : X \to \mathbb{K}$ (zob. zad. 1.A.1), natomiast $B(X)$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji ograniczonych $f : X \to \mathbb{K}$ (zob. zad. 1.A.5).