gdzieś pomiędzy III wiekiem p.n.e. a II wiekiem n.e. W rozdziale siódmym „Zbyt dużo i nie wystarczająco" po raz pierwszy wprowadzono koncepcję wyznacznika. Dopiero 1000 lat później pojawiły się publikacje z jego definicją:

- 1683 rok – Kowa Seki, jeszcze błędna, poprawiona w 1710 roku,
- 1693 rok – Gottfried Leibnitz.

Były to prace niezależne. W 1750 roku Gabriel Cramer publikuje wzory dające pełny algorytm rozwiązania układów równań liniowych.

Dzisiaj bez macierzy nie istniałaby np. współczesna grafika 3D. Macierze są wymarzonym narzędziem do przeprowadzania obliczeń i rozwiązywania równań. Łatwość ich implementacji w komputerowym świecie i zoptymalizowane szybkościowo algorytmy operacji na nich powodują, że nie możemy się bez nich obejść.

2. Macierze

2.1. Wiadomości wstępne o macierzach

Niech $m, n \in N$. Prostokątną tablicę

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

utworzoną z liczb rzeczywistych (zespolonych) a_{ij} dla $i = 1, \ldots, m,$ $j = 1, \ldots, n$ nazywamy **rzeczywistą (zespoloną) macierzą prostokątną** o wymiarze $m \times n$. Elementy a_{ij} nazywamy wyrazami macierzy. Rzędy pionowe nazywamy kolumnami, zaś poziome – wierszami tej macierzy. Symbol a_{ij} jest to element stojący na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Macierze oznaczamy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \ldots$.

Zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych (zespolonych) $m \times n$ (m-wierszy, n-kolumn) będziemy oznaczali $M_{m\times n}(R)$ $\left(M_{m\times n}(C)\right)$.

Rodzaje macierzy:

1. **macierz kwadratowa** stopnia n – macierz, w której ilość wierszy równa jest ilości kolumn, czyli $m = n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   Elementy a_{ii}, $i = 1,2,...,n$, tzn. $(a_{11}, a_{22},..., a_{nn})$ tworzą główną przekątną macierzy. Sumę tych wyrazów czyli $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ nazywamy **śladem macierzy** i oznaczamy $tr(A)$.

2. **macierz trójkątna dolna (górna)** – macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, w której wszystkie elementy leżące nad (pod) główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. **macierz diagonalna** – macierz kwadratowa stopnia n, w której wszystkie wyrazy znajdujące się poza główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   O macierzy diagonalnej można również mówić dla macierzy prostokątnych.

4. **macierz jednostkowa** – macierz diagonalna stopnia n, w której wszystkie elementy na głównej przekątnej są równe 1.
   Oznaczamy ją I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

5. **macierz zerowa** – macierz wymiaru $m \times n$, w której wszystkie elementy równe są 0. Oznaczamy ją O.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Działania na macierzach

Dwie macierze $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ i $B = \left[b_{ij}\right]_{m' \times n'}$ są równe, gdy mają ten sam wymiar, tzn. $m = m'$ i $n = n'$ oraz elementy obu macierzy znajdujące się na tych samych miejscach są sobie równe, czyli $a_{ij} = b_{ij}$ dla dowolnych $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$.

W zbiorze macierzy określamy podstawowe działania: transponowanie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie macierzy przez liczbę rzeczywistą α, mnożenie macierzy. Zapamiętajmy, nie istnieje dzielenie macierzy.

- **Transponowanie macierzy**

Macierzą transponowaną do macierzy $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ nazywamy macierz $B = \left[b_{ij}\right]_{n \times m}$ określoną wzorem $b_{ij} = a_{ji}$ dla $i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$.

Piszemy wówczas

$$B = A^T.$$

Transponowanie macierzy polega zatem na zamianie wierszy z kolumnami w danej macierzy.

PRZYKŁAD 2.2.1. Dla danej macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ mamy

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- **Dodawanie i odejmowanie macierzy**

Sumą (różnicą) macierzy $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ i $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ nazywamy macierz $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, której elementy określone są jako $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ dla $i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$. A więc

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \ldots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \ldots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \ldots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} = A \pm B.$$

Dodawać i odejmować możemy jedynie macierze tych samych wymiarów.

PRZYKŁAD 2.2.2. Dla danych macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ oraz

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ mamy}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-2) & 5-0 & 1-3 \\ -2-4 & 3-(-1) & 0-2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

■

- **Mnożenie macierzy przez liczbę rzeczywistą** α

Iloczynem macierzy $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ przez liczbę $\alpha \in R$ nazywamy macierz $B=[b_{ij}]_{m\times n}$, której elementy określamy jako $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$ dla $i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n$. Mamy zatem

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \dots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \dots & \alpha\cdot a_{mn} \end{bmatrix}=\alpha\cdot A.$$

PRZYKŁAD 2.2.3. Dla danych macierzy $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ oraz $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ obliczyć $2A-4B$.

Rozwiązanie

$$2A-4B=2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -4 & 18 \\ -16 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

■

- **Mnożenie macierzy**

Iloczynem macierzy $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ i $B=[b_{ij}]_{n\times k}$ nazywamy macierz $C=[c_{ij}]_{m\times k}$, której elementy określa wzór

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{in}\cdot b_{nj}$$

dla $i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,k$.

Iloczyn macierzy $A\cdot B$ jest wykonalny, gdy ilość kolumn macierzy A jest taka sama jak ilość wierszy macierzy B.

PRZYKŁAD 2.2.4. Dla danych $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ oraz $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

obliczyć iloczyn $A\cdot B$.

Rozwiązanie

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot1\\ -1\cdot1+3\cdot3 & -1\cdot(-1)+3\cdot(-2) & -1\cdot2+3\cdot1 & -1\cdot0+3\cdot1\\ 2\cdot1+(-1)\cdot3 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot2+(-1)\cdot1 & 2\cdot0+(-1)\cdot1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1+6 & -1-4 & 2+2 & 0+2\\ -1+9 & 1-6 & -2+3 & 0+3\\ 2-3 & -2+2 & 4-1 & 0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -5 & 4 & 2\\ 8 & -5 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

■

Zauważmy, że iloczyn $B\cdot A$ jest niewykonalny, gdyż w macierzy B mamy 4 kolumny, zaś w macierzy A wierszy jest 3. Na tym przykładzie widzimy również brak przemienności mnożenia macierzy. Iloczyn macierzy nie jest przemienny również dla macierzy kwadratowych.

PRZYKŁAD 2.2.5. Dla danych macierzy $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ oraz $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ obliczyć iloczyny $A\cdot B$ oraz $B\cdot A$.

Rozwiązanie

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot(-2)-1\cdot3 & 2\cdot1-1\cdot3\\ 0\cdot(-2)+3\cdot3 & 0\cdot1+3\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -1\\ 9 & 9\end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot 2 + 1\cdot 0 & -2\cdot(-1)+1\cdot 3 \\ 3\cdot 2+3\cdot 0 & 3\cdot(-1)+3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Widać, że $A\cdot B \neq B\cdot A$.

■

Podstawowe własności działań na macierzach:

Załóżmy, że macierze A, B, C są takie, aby działania na nich przeprowadzane były wykonalne. Wówczas zachodzi:

1. Przemienność dodawania:

   $A + B = B + A$.

   Mnożenie macierzy nie jest przemienne. Nie wyklucza to istnienia macierzy A, B takich, że $A\cdot B = B\cdot A$.
2. Łączność dodawania i mnożenia:

   $(A+B)+C = A+(B+C)$,

   $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.
3. Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

   $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$,

   $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$.
4. $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$ dla $\alpha\in R$.
5. $\alpha\cdot(A+B) = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B$ dla $\alpha\in R$.
6. $A\cdot I = I\cdot A = A$.
7. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
8. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$.
9. $\left(A^T\right)^T = A$.

PRZYKŁAD 2.2.6. Dla danych macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ obliczyć $A\cdot C^T - 2B$.

Rozwiązanie

$$A\cdot C^T-2B=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&5\end{bmatrix}^T-2\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&5&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&2\\2&0\\0&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot2+2\cdot0&1\cdot2+0\cdot0+2\cdot5\\3\cdot(-1)+5\cdot2+1\cdot0&3\cdot2+5\cdot0+1\cdot5\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}4&-2\\6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&12\\7&11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&14\\1&9\end{bmatrix}.$$

■

PRZYKŁAD 2.2.7. Dla danych macierzy $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\-2&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&1\\0&2\\-1&3\end{bmatrix}$ rozwiązać równanie macierzowe $2A^T+3X=B$.

Rozwiązanie

- ✓ Przekształcamy równanie $2A^T+3X=B$ i wyliczamy macierz niewiadomą X:

$$3X=B-2A^T$$

Dzieląc obustronnie przez 3 mamy:

$$X=\frac{1}{3}\cdot\left(B-2A^T\right).$$

- ✓ Wstawiamy odpowiednie macierze do równania:

$$X=\frac{1}{3}\cdot\left(\begin{bmatrix}3&1\\0&2\\-1&3\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}1&3&2\\-2&0&1\end{bmatrix}^T\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\begin{bmatrix}3&1\\0&2\\-1&3\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\\2&1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\begin{bmatrix}3&1\\0&2\\-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-4\\6&0\\4&2\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}1&5\\-6&2\\-5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\-2&\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Szukaną macierzą jest $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

■

PRZYKŁAD 2.2.8. Znaleźć macierz X spełniającą równanie $3X^T - 2X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

✓ Przewidujemy, że macierz X będzie miała postać $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $a, b, c, d \in R$, gdyż macierz po prawej stronie równania jest wymiaru 2×2. Jednym z warunków równości macierzy jest zgodność ich wymiarów. Następnie mamy, że $X^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

Wstawiając do równania otrzymujemy:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a & 3c \\ 3b & 3d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a - 2a & 3c - 2b \\ 3b - 2c & 3d - 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 3c - 2b \\ 3b - 2c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ✓ Aby macierze były równe, odpowiadające sobie elementy muszą być równe. Powstaje więc układ równań:

$$\begin{cases} a=1 \\ 3c-2b=1 \\ 3b-2c=0 \\ d=1 \end{cases}.$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy $\begin{cases} a=1 \\ b=0{,}4 \\ c=0{,}6 \\ d=1 \end{cases}$.

- ✓ Szukana macierz ma postać $X=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 1 \end{bmatrix}$.

■

ZADANIA

2.1. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Wyznaczyć macie-rze: $2A+C,\ A-3C,\ A\cdot B,\ B\cdot A,\ A\cdot C^T,\ A^T\cdot C$.

2.2. Niech będą dane macierze

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Obliczyć $2A-3C^T$.

b) Rozwiązać równanie macierzowe $3X+A^T=2C$.

c) Obliczyć iloczyny macierzy $A\cdot C,\ C\cdot A,\ A\cdot B,\ C^T\cdot C,\ C\cdot C^T$.

2.3. Znaleźć macierz $AB-BA$ dla $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.